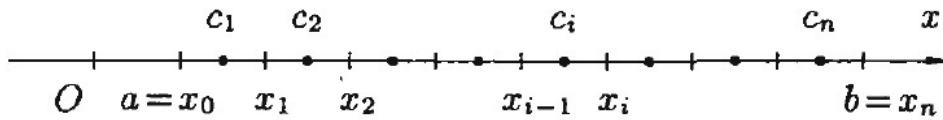


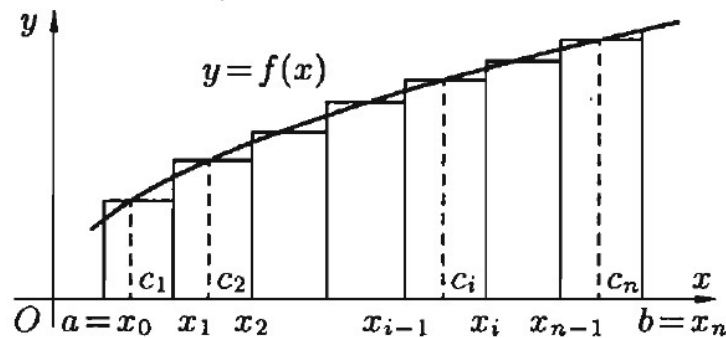
Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Виконаємо наступні дії:

1. За допомогою точок $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частинних відрізків.



2. В кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ виберімо довільну точку c_i , $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і обчислимо в ній значення функції, тобто величину $f(c_i)$.
3. Помножимо знайдене значення функції $f(c_i)$ на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного частинного відрізка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.



4. Складемо суму S_n усіх таких добутків:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Сума вигляду (1) називається **інтегральною сумою** функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка: $\lambda = \max \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

5. Знайдемо границю інтегральної суми (1), коли $n \rightarrow \infty$ так, що $\lambda \rightarrow 0$.

Якщо при цьому інтегральна сума S_n має границю I , яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки, ні від вибору точок в них, то

число I називається **визначеним інтегралом від функції** $y = f(x)$ на відрізку

$[a; b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (2).$$

Число a називається **нижньою** границею інтегрування, число b – **верхньою** границею інтегрування, $f(x)$ – **підінтегральною функцією**, відрізок $[a; b]$ – **областю (відрізком) інтегрування**, x – **змінна інтегрування**.

Якщо існує скінченна границя I , то функція $f(x)$ називається **інтегрованою** на відрізку $[a; b]$.

Має місце наступна теорема існування визначеного інтеграла:

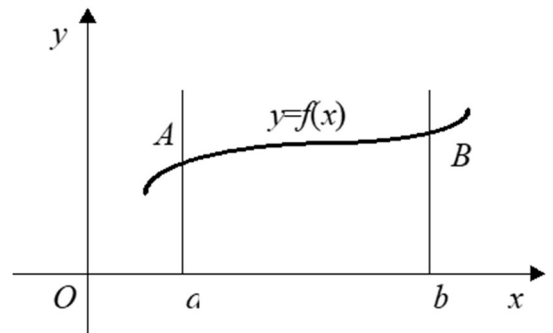
Теорема (Коші). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.*

Геометрична інтерпретація визначеного інтегралу.

Якщо $f(x) > 0$ на відрізку

$[a; b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$

с геометричної точки зору представляє собою площину **криволінійної трапеції** $aABb$ – фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.



Визначений інтеграл, як площа криволінійної трапеції не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \quad .$$

Розглянемо **основні властивості визначеного інтеграла**.

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$3. \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx, \text{ де } A - \text{ стала.}$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$5. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ для будь-яких чисел } a, b, c, \text{ } a < c < b.$$

$$6. \text{ Якщо } m < f(x) < M \text{ на } [a; b], \text{ то } m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

$$7. \text{ Якщо } f(x) \text{ непарна функція, тобто } f(-x) = -f(x), \text{ то } \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

$$8. \text{ Якщо } f(x) \text{ парна функція, тобто } f(-x) = f(x), \text{ то } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Обчислення визначеного інтегралу

Формула Ньютона–Лейбніца. Обчислення визначеного інтегралу безпосередньо за означенням (за допомогою інтегральної суми) навіть для простих функцій приводить к складним обчисленням. Тому для цієї мети застосовують формулу, яка називається формулою Ньютона–Лейбніца. (В.Г.Лейбниц (1646–1716) – відомий німецький філософ і математик. І.Ньютон (1642–1727) – англійський фізик і математик. Цим вченим належить заслуга створення диференціального і інтегрального обчислення).

Формула Ньютона–Лейбніца:

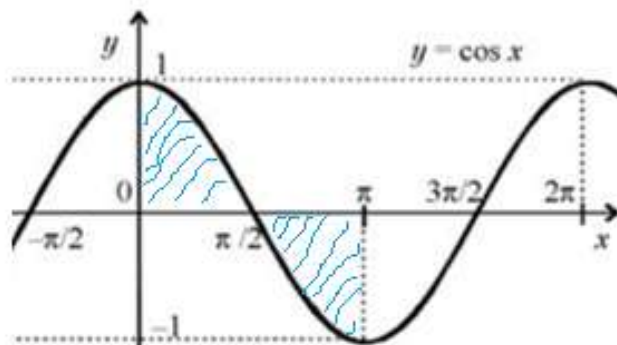
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

- визначений інтеграл дорівнює різниці значень невизначеного інтегралу при верхньої і нижньої границях інтегрування.

Приклад 1. $\int_2^3 3x^2 dx = 3 \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = x^3 \Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$

Приклад 2. $\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$

Чи можна стверджувати, що в цьому прикладі площа дорівнює 0?



$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \right| = \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \left| \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right| =$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) + \left| \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) \right| = 1 + 1 = 2$$

Методи обчислення визначеного інтегралу

1. Заміна змінної. Нехай дано інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція $f(x)$

неперервна на відрізку $[a; b]$. Введем нову змінну $x = \varphi(t)$.

Якщо

- 1) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;
- 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;
- 3) $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$,

то
$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (3)$$

Приклад 3.

$$\int_2^3 24(6x-11)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = 6x-11 \quad t_1 = 6 \cdot 2 - 11 = 1 \\ dt = 6dx \quad t_2 = 6 \cdot 3 - 11 = 7 \\ \frac{1}{6} dt = dx \end{array} \right| = \int_1^7 24t^3 \cdot \frac{1}{6} dt = \int_1^7 4t^3 dt = t^4 \Big|_1^7 = 2401 - 1 = 2400$$

2. Інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами для визначеного інтегралу має вигляд:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad . \quad (4)$$

Приклад 4.

$$\int_0^{\pi/6} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = (x)' dx = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi/6} + \cos x \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}.$$

3. Спрощення інтегралів у симетричних межах інтегрування.

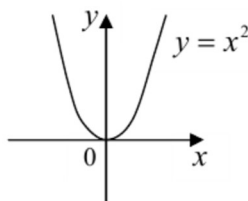
Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є:

а) парною, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

б) непарною, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

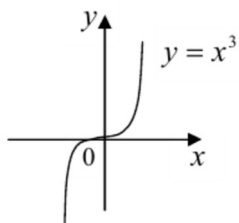
$$\int_{-5}^5 x^2 dx = 2 \int_0^5 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = 2 \cdot \frac{5^3}{3}.$$

функція парна



$$\int_{-7}^7 x^3 dx = 0$$

функція непарна



4. Інтеграли від періодичних функцій

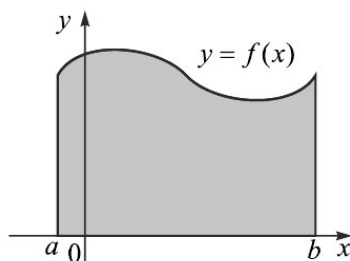
Якщо інтегрована функція $f(x)$ є періодичною з періодом T , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx, \text{ де } n \in Z.$$

Обчислення площі, якщо крива задана в декартових координатах.

Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є неперервною та набуває додатних значень, площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і дугою кривої $y = f(x)$, дорівнює

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$$



Якщо крива задана рівнянням $x = \varphi(y)$, де функція $\varphi(y)$ на відрізку $[c;d]$ є неперервною та набуває на цьому відрізку додатних значень, то площа фігури, обмеженої відрізками прямих $y = c$, $y = d$, $x = 0$ і дугою кривої $x = \varphi(y)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d xdy.$$

