Інтегрування раціональних функцій

Клас раціональних функцій поділяється на цілі раціональні функції або многочлени та дробово-раціональні функції, які є відношенням двох многочленів. Найпростішою цілою раціональною функцією є **многочлен n-го порядку**, тобто функція вигляду:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де - a_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ - дійсні числа. Тоді невизначений інтеграл від $P(x)$ існує і він є цілою раціональною функцією. Справді,

$$\int P(x)dx = \int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)dx =$$

$$= a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + a_2\int x^{n-2}dx + \ldots + a_n\int dx =$$

$$= a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + a_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + a_nx + c$$

У результаті інтегрування многочлена n-го степеня дістали многочлен $(n+1)$ -го степеня.

Приклад 1:

$$\int (3x^4 + 5x^3 + 9x + 7)dx = 3\int x^4dx + 5\int x^3dx + 9\int xdx + 7 =$$

$$= \frac{3x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + 9\frac{9x^2}{2} + 7x + C$$

Розглянемо тепер дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ - многочлен степеня n, а $Q_m(x)$ - многочлен степеня m, який має вигляд

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m,$$

де b_i $(i = 0,1,\ldots,m)$ - дійсні числа.

Означення. Алгебраїчний дріб називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника $n < m$. Коли ж $n \geq m$, то алгебраїчний дріб називається ***неправильним***.

$\dfrac{7 - 8x + x^3}{2x^5 - 3x^3 + 1}$ - правильний дріб, $\dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 5}$ - неправильний дріб.

Якщо алгебраїчний дріб неправильний, то за допомогою ділення многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ з нього можна виділити цілу частину, а саме многочлен

$$G(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\ldots+c_k .$$

Тоді можна записати

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=G(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $R(x)$ - степінь якого менше, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ правильний алгебраїчний дріб.

Приклад. Виділити з неправильного дробу цілу частину.

$\int\frac{2x^2+5x+1}{x+5}dx=\int\left(2x-5+\frac{26}{x+5}\right)dx=2\int xdx-5\int dx+26\int\frac{1}{x+5}dx=$ $=2\cdot\frac{x^2}{2}-5x+26\ln\lvert x+5\rvert+C=x^2-5x+26\ln\lvert x+5\rvert+C$	$\begin{array}{r\|l} 2x^2+5x+1 & x+5 \\ \cline{2-2} -\;\underline{2x^2+10x} & 2x-5 \\ -5x+1 & \\ -\;\underline{-5x-25} & \\ 26 & \end{array}$

Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.

Означення. Простими, або елементарними, дробами називаються такі дроби:

$$1)\frac{A}{x-a},\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\frac{M(x)+N}{x^2+px+q},\quad 4)\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де A, M, N, a, p, q- дійсні числа, $n\geq 2$ - ціле додатне число, причому: $\frac{p^2}{4}-q<0$, тобто квадратний тричлен x^2+px+q має комплексні корені.

Інтегрування найпростіших дробів

І-й тип:	$\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln\lvert x-a\rvert+C;$
ІІ-й тип:	$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;$
ІІІ-й тип:	$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Розв'язування прикладу

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\left|x^2+4x+8=(x+2)^2+4\right|=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\begin{vmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\left|t=x+2\right|=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$.

Розв'язування прикладу

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\left|2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)\right|=$$

$$=\int\frac{7-8x}{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}dx=\begin{vmatrix}x-\frac{3}{4}=t\\ x=\frac{3}{4}+t\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{7-8\left(t+\frac{3}{4}\right)}{2\left(t^2-\frac{1}{16}\right)}dt=\frac{1}{2}\int\frac{-8t+1}{t^2-\frac{1}{16}}dt=-4\int\frac{t}{t^2-\frac{1}{16}}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-\frac{1}{16}}dt=-2\int\frac{d\left(t^2-\frac{1}{16}\right)}{t^2-\frac{1}{16}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|=-2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right|+\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$=\left|t=x-\frac{3}{4}\right|=-2\ln\left|x^2-\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}\right|+\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|+C=-2\ln\left|2x^2-3x+1\right|+\ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|+C.$$

Правило інтегрування правильних дробово-раціональних функцій.

Щоб про інтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, треба:

1. Розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;
2. Виразити правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ через суму елементарних раціональних дробів із невизначеними коефіцієнтами та відшукати ці коефіцієнти;

3. Знайти $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ як суму інтегралів від знайдених елементарних раціональних дробів.

Загальний алгоритм інтегрування раціональних дробів $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

1. Якщо задано неправильний раціональний дріб ($m \geq n$), слід виділити в ньому цілу частину. Для цього виконати ділення чисельника на знаменник (цілою частиною є частка від ділення, а залишок – чисельником правильного дробу) і подати дріб у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = A_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},\ \text{де}\ \frac{R_r(x)}{Q_n(x)} - \text{правильний дріб.}$$

2. Розкласти знаменник правильного дробу на лінійні і квадратні (D<0) множники.

3. Правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби за формулою

$$\frac{R_r(x)}{(x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^s} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots +$$

$$+\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x+px+q)^s}, (*)$$

де $A_1, A_2, \ldots A_k, M_1, \ldots M_s, N_1, \ldots N_s$ – невизначені коефіцієнти.

<u>Роз'яснення до формули (*):</u>

1) кожному множнику $(x-a)$ відповідає один дріб І-го типу $\dfrac{A}{x-a}$;

2) множнику $(x-a)^k$ відповідає k дробів І-го і ІІ-го типів

$$\frac{A}{x-a} + \ldots + \frac{A}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A}{(x-a)^k};$$

3) множнику (x^2+px+q), у якого $D<0$, відповідає один дріб ІІІ-го типу

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

4. Обчислити невизначені коефіцієнти в попередньому розкладі.

5. Обчислити інтеграли від найпростіших дробів.

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots, A_n, M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_n$ застосовують два способи: **1) спосіб невизначених коефіцієнтів;**

2) спосіб надання аргументу окремих значень.

Важливо! Спосіб надання аргументу окремих значень **особливо зручний** у тому випадку, коли знаменник дробу **має дійсні корені.** У інших випадках цей спосіб теж скорочує обчислення, оскільки дає можливість уникнути розв'язування системи з числом рівнянь, яке дорівнює числу невідомих. Корисно комбінувати обидва процеси.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Розв'язування прикладу

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = \left| x^3+4x^2+4x = x(x+2)^2 \right| = \int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx =$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \right) dx = \left| \begin{array}{l} 3x^2+8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \\ \begin{array}{l|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 = A+B, \\ 0 = 4A+2B+C, \\ 8 = 4A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} A=2, \\ B=1, \\ C=-10. \end{array} \right. \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

Розв'язування прикладу

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^4+3x^2} \right) dx == \int \left(2x + \frac{1}{x^2(x^2+3)} \right) dx =$$

$$= \int \left(2x + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx+N}{x^2+3} \right) dx = \left| \begin{array}{l} 1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Mx+N)x^2 \\ x=0 \to 1 = 3B \to B = \frac{1}{3}, \\ \begin{array}{c|l} x & 0 = 3A, \textit{ звідси } A = 0, \\ x^2 & 0 = B+N, \textit{ звідси } N = -B = -\frac{1}{3}, \\ x^3 & 0 = A+M, \textit{ звідси } M = -A = 0. \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$