

## Інтегрування раціональних функцій

Клас раціональних функцій поділяється на цілі раціональні функції або многочлени та дробово-раціональні функції, які є відношенням двох многочленів. Найпростішою цілою раціональною функцією є **многочлен  $n$ -го порядку**, тобто функція вигляду:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

де -  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) - дійсні числа. Тоді невизначений інтеграл від  $P(x)$  існує і він є цілою раціональною функцією. Справді,

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= \int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n)dx = \\ &= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + a_2 \int x^{n-2} dx + \dots + a_n \int dx = \\ &= a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + a_2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + a_n x + c \end{aligned}$$

У результаті інтегрування многочлена  $n$ -го степеня дістали многочлен  $(n+1)$ -го степеня.

### Приклад 1:

$$\begin{aligned} \int (3x^4 + 5x^3 + 9x + 7)dx &= 3 \int x^4 dx + 5 \int x^3 dx + 9 \int x dx + 7 \int dx = \\ &= \frac{3x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 7x + C \end{aligned}$$

Розглянемо тепер дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де  $P_n(x)$  - многочлен степеня  $n$ , а  $Q_m(x)$  - многочлен степеня  $m$ , який має вигляд

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m,$$

де  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) - дійсні числа.

**Означення.** Алгебраїчний дріб називається **правильним**, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника  $n < m$ . Коли ж  $n \geq m$ , то алгебраїчний дріб називається **неправильним**.

$$\frac{7-8x+x^3}{2x^5-3x^3+1} - \text{правильний дріб,} \quad \frac{2x^2+5x+1}{x+5} - \text{неправильний дріб.}$$

Якщо алгебраїчний дріб неправильний, то за допомогою ділення многочлена  $P_n(x)$  на многочлен  $Q_m(x)$  з нього можна виділити цілу частину, а саме многочлен

$$G(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \dots + c_k.$$

Тоді можна записати

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де  $R(x)$  - степінь якого менше, ніж степінь многочлена  $Q_m(x)$ , тобто  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  правильний алгебраїчний дріб.

Приклад. Виділити з неправильного дробу цілу частину.

$\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 5} dx = \int \left( 2x - 5 + \frac{26}{x + 5} \right) dx = 2 \int x dx - 5 \int dx + 26 \int \frac{1}{x + 5} dx =$ $= 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + 26 \ln x + 5  + C = x^2 - 5x + 26 \ln x + 5  + C$	$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x + 1 \mid x + 5 \\ - \phantom{2x^2} + 5x + 1 \\ \hline 2x^2 + 10x \\ - \phantom{2x^2} - 5x + 1 \\ \hline -5x - 25 \\ \phantom{-5x} - 25 \end{array}$
---	---

### Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.

*Означення.* Простими, або елементарними, дробами називаються такі дроби:

$$1) \frac{A}{x - a}, \quad 2) \frac{A}{(x - a)^n}, \quad 3) \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad 4) \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n},$$

де  $A, B, a, p, q$  - дійсні числа,  $n \geq 2$  - ціле додатне число, причому:  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , тобто квадратний тричлен  $x^2 + px + q$  має комплексні корені.

### Інтегрування найпростіших дробів

I-й тип:	$\int \frac{A dx}{x - a} = A \ln x - a  + C;$
II-й тип:	$\int \frac{A dx}{(x - a)^k} = A \cdot \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C;$
III-й тип:	$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$

**Приклад 2.** Знайти інтеграл  $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$ .

Розв'язування прикладу

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} &= \left| x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 \right| = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} t = x + 2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Знайти інтеграл  $I = \int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx$ .

Розв'язування прикладу

$$\begin{aligned} \int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx &= \left| 2x^2 - 3x + 1 = 2 \left( x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right) \right| = \\ &= \int \frac{7 - 8x}{2 \left( \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right)} dx = \left| \begin{array}{l} x - \frac{3}{4} = t \\ x = \frac{3}{4} + t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{7 - 8 \left( t + \frac{3}{4} \right)}{2 \left( t^2 - \frac{1}{16} \right)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{-8t + 1}{t^2 - \frac{1}{16}} dt = -4 \int \frac{t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - \frac{1}{16}} dt = -2 \int \frac{d \left( t^2 - \frac{1}{16} \right)}{t^2 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}} \right| = -2 \ln \left| t^2 - \frac{1}{16} \right| + \ln \left| \frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}} \right| + C = \\ &= \left| t = x - \frac{3}{4} \right| = -2 \ln \left| x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \right| + \ln \left| \frac{x - 1}{x - \frac{1}{2}} \right| + C = -2 \ln |2x^2 - 3x + 1| + \ln \left| \frac{x - 1}{2x - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

**Правило інтегрування правильних дробово-раціональних функцій.**

Щоб про інтегрувати правильний раціональний дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , треба:

1. Розкласти многочлен  $Q(x)$  на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;
2. Виразити правильний дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  через суму елементарних раціональних дробів із невизначеними коефіцієнтами та відшукати ці коефіцієнти;

3. Знайти  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  як суму інтегралів від знайдених елементарних раціональних дробів.

**Загальний алгоритм інтегрування раціональних дробів  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$**

1. Якщо задано неправильний раціональний дріб ( $m \geq n$ ), слід виділити в ньому цілу частину. Для цього виконати ділення чисельника на знаменник (цілою частиною є частка від ділення, а залишок – чисельником правильного дробу) і подати дріб у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = G_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \text{ де } \frac{R_r(x)}{Q_n(x)} \text{ – правильний дріб.}$$

2. Розкласти знаменник правильного дробу на лінійні і квадратні ( $D < 0$ ) множники.  
3. Правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби за формулою

$$\frac{R_r(x)}{(x-a)^k \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^s} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}, (*)$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_k, M_1, \dots, M_s, N_1, \dots, N_s$  – невизначені коефіцієнти.

Роз'яснення до формули (\*):

1) кожному множнику  $(x-a)$  відповідає один дріб I-го типу  $\frac{A}{x-a}$ ;

2) множнику  $(x-a)^k$  відповідає  $k$  дробів I-го і II-го типів

$$\frac{A}{x-a} + \dots + \frac{A}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A}{(x-a)^k};$$

3) множнику  $(x^2+px+q)$ , у якого  $D < 0$ , відповідає один дріб III-го

типу  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ;

4. Обчислити невизначені коефіцієнти в попередньому розкладі.

5. Обчислити інтеграли від найпростіших дробів.

Для знаходження коефіцієнтів  $A_1, A_2, \dots, A_n, M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_n$  застосовують два способи: **1) спосіб невизначених коефіцієнтів;**

**2) спосіб надання аргументу окремих значень.**

**Важливо!** Спосіб надання аргументу окремих значень **особливо зручний** у тому випадку, коли знаменник дробу **має дійсні корені**. У інших випадках цей спосіб теж скорочує обчислення, оскільки дає можливість уникнути розв'язування

системи з числом рівнянь, яке дорівнює числу невідомих. Корисно комбінувати обидва процеси.

**Приклад 4.** Знайти інтеграл  $I = \int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$ .

Розв'язування прикладу

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx &= \int \frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} dx = \\ &= \int \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \right) dx = \left. \begin{array}{l} 3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \\ x^2 \left\{ \begin{array}{l} 3 = A + B, \\ 0 = 4A + 2B + C, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 2, \\ B = 1, \\ C = -10. \end{array} \right. \\ x^0 \left\{ \begin{array}{l} 8 = 4A \end{array} \right. \end{array} \right| = \\ &= \int \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = 2 \ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Знайти інтеграл  $I = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$ .

Розв'язування прикладу

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx &= \int \left( 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2} \right) dx = \int \left( 2x + \frac{1}{x^2(x^2 + 3)} \right) dx = \\ &= \int \left( 2x + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 3} \right) dx = \left. \begin{array}{l} 1 = Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Mx + N)x^2 \\ x = 0 \rightarrow 1 = 3B \rightarrow B = \frac{1}{3}, \\ x \left\{ \begin{array}{l} 0 = 3A, \text{ звідси } A = 0, \\ 0 = B + N, \text{ звідси } N = -B = -\frac{1}{3}, \\ 0 = A + M, \text{ звідси } M = -A = 0. \end{array} \right. \end{array} \right| = \\ &= \int \left( 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)} \right) dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$