Лекція 4

Методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування.

Цей метод ґрунтується на розкладі підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій та на застосуванні властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(5\cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Розв'язання.

Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$\int \left(5\cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 5\int \cos x dx - 9\int x^2 dx + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 5\sin x - 3x^3 + 7arcsix + C$$

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$.

Розв'язання.

$$\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

Приклад . Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+4} dx = \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \int dx - 4\int \frac{1}{x^2+4} dx =$$

$$= x - 4 \cdot \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = x - 2arctg\frac{x}{2} + C.$$

Метод підведення під знак диференціала

Диференціал функції $y = f\left(x\right)$ дорівнює $dy = y'dx$. Цю формулу можна застосовувати і в зворотньому порядку:

$$3x^2 dx = d\left(x^3\right)$$

$$\cos x dx = d\left(\sin x\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\left(\arcsin x\right)$$

Тому часто для приведення інтегралу до табличного застосовують формулу:

$$f'\left(u\right)du = d\left(f\left(u\right)\right).$$

Припустимо, що в інтегралі $\int f(x)dx = F\left(x\right) + C$ від підінтегральної функції $f\left(x\right)$ можна відокремити функцію $\varphi\left(x\right) = u$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді

$$f\left(x\right)dx = g\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)dx = g\left(u\right)du.$$

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x)dx = \int g\left(u\right)du$$

Приклад. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x \cdot d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

Приклад. $\int \arcsin^9 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^9 x \cdot d\left(\arcsin x\right) = \frac{\arcsin^{10} x}{10} + C$

При операції підведення під знак диференціала часто використовують такі перетворення диференціала:

$dx = d(x+a)$; $\quad dx = \frac{1}{a} d(ax)$; $\quad dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$;

$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$; $\quad \frac{dx}{x+a} = d(\ln(x+a))$; $\quad x^n dx = \frac{1}{n+1} d\left(x^{n+1}+a\right)$;

$\cos x dx = d(\sin x)$; $\quad \sin x dx = -d(\cos x)$; $\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$;

$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$; $\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$; $\quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$.

Приклади.

1) $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

2) $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$;

3) $\int \frac{dx}{x+8} = \int \frac{d(x+8)}{x+8} = \ln|x+8| + C$

4) $\int \cos(3x+2) dx = \int \cos(3x+2) \cdot \frac{1}{3} d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + c$

Метод заміни змінної інтегрування

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного.

Приклад . Знайти $\int \sqrt{3x+4}dx$.

Розв'язок. Позначимо $t = 3x+4$.

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+4 \\ dt = (3x+4)'\,dx = 3dx \\ \frac{1}{3}dt = dx \end{array} \right| \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3} + C.$$

Приклад . Знайти $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Розв'язок. Позначимо $t = \sin x$. Тоді $dt = (\sin x)'\,dx = \cos x dx$.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = (\sin x)'\,dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Нехай u и v – дві функції незалежної змінної x, що диференційовані на $[a,b]$.

Оскільки $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, то функція $u \cdot v$ – первісна для суми $u'v + uv'$. Тоді маємо

$$\int (u'v + uv')dx = uv + C \;.$$

$$\int vu'dx + \int uv'dx = uv + C$$

Враховуючи, що $u'dx = du$, $v'dx = dv$, будемо мати

$$\int vdu + \int udv = uv + C.$$

Отже,

$$\int udv = uv - \int vdu + C.$$

Оскільки $\int vdu$ включає довільну сталу, то до неї можна включити і сталу *C*. Остаточно отримаємо вираз:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

що називають ***формулою інтегрування частинами***.

За допомогою цієї формули знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться к пошуку іншого інтеграла $\int vdu$, який буде або табличним, або подібним початковому, або інтеграла, що знаходиться за допомогою заміни змінної. При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайдено.

Визначимо **деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегруванням частинами**.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha xdx$, $\int P(x)\cos\alpha xdx$, де $P(x)$ – многочлен, α - число. За u слід прийняти $P(x)$, а за dv – відповідний вираз $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$.
2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$. За u приймають відповідно функції $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv – вираз $P\left(x\right)dx$.
3. Інтеграли вигляду, $\int e^{\alpha x}\cdot\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta xdx$, де α и β - числа. Не має різниці, що прийняти за u: $e^{\alpha x}dx$, або $\sin\beta x$.

Зауваження. Інтегрування частинами може застосовуватися декілька разів.

Приклад . Знайти $\int x\cos xdx$.

Розв'язок. $\int x\cos xdx = \left\| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos xdx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right\| = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + C$.

Приклад . Знайти $\int (4x+2)\cos 5xdx$

Розв'язок.

$$\int (4x+2)\cos 5xdx = \left\| \begin{matrix} u = 4x+2 \\ du = 4dx \\ dv = \cos 5xdx \\ v = \int \cos 5xdx = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right\| = (4x+2)\cdot\frac{1}{5}\sin 5x - \int \frac{1}{5}\sin 5x\cdot 4dx = .$$

$$= \frac{4x+2}{5}\sin 5x + \frac{4}{25}\cos 5x + C$$

Приклад . Знайти $\int \ln xdx$.

$$\int \ln xdx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right\| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Приклад . Знайти $\int \sin x\cdot e^x dx$.

Розв'язок. $I = \int \sin x\cdot e^x dx = \int \sin xde^x = \sin x\cdot e^x - \int e^x d(\sin x) =$

$= e^x\sin x - \int \cos x\cdot e^x dx = e^x\sin x - \int \cos xde^x = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x d(\cos x) =$

$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int \sin x\cdot e^x dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$.

Тоді $2I = e^x(\sin x - \cos x)$ або $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$