

# Ряды

## 1) Числовые ряды с положительными членами

Необходимое условие сходимости	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .	
Достаточные условия сходимости	1. <u>Предельный признак сравнения:</u> если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ , то оба ряда сходятся, или оба расходятся.	$u_n = \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$
	2. <u>Признак Даламбера:</u> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , $l < 1$ – ряд сходится, $l > 1$ – ряд расходится, $l = 1$ – доп. исследование	$(n!)$ или $(a^n)$
	3. <u>Радикальный признак Коши:</u> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ , $l < 1$ – ряд сходится, $l > 1$ – ряд расходится, $l = 1$ – доп. исследование	$u_n = (\dots)^n$
	4. <u>Интегральный признак Коши:</u> Если $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то и ряд сходится (расходится). $\int_a^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} const \Rightarrow \text{сходится} \\ \pm\infty \Rightarrow \text{расходится} \end{cases}$	Можно вычислить $\int_a^{\infty} f(x)dx$ , где $f(n) = u_n \quad \forall n$

## Частные случаи

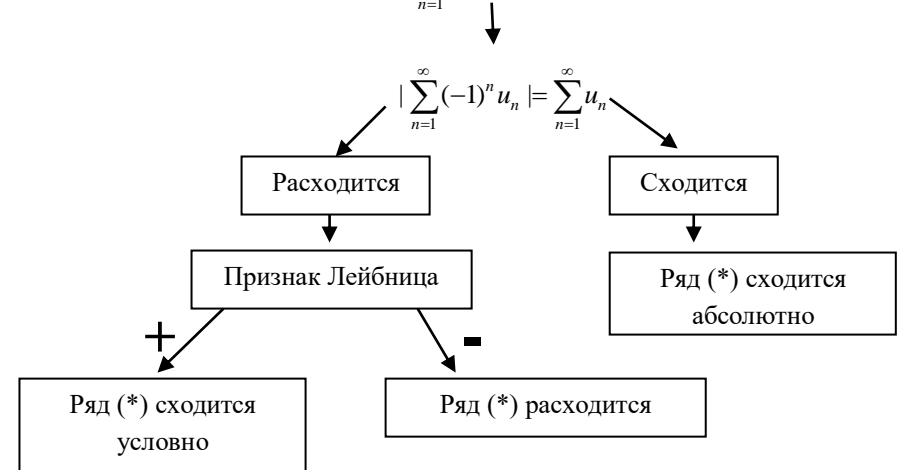
I. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1 \\ \text{расходится, если } p \leq 1 \end{cases}$$

II. Ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \text{сходится, если } |q| < 1 \\ \text{расходится, если } |q| \geq 1 \end{cases}$$

2) **Знакопередающиеся ряды**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  (\*)



**Признак Лейбница:**

1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots, u_n > 0$ ,

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

3) **Степенные ряды:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  или  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Радиус сходимости	$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_n}{a_{n+1}} \right $ или $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ a_n }}$ .
Область сходимости	$ x - x_0  < R$

#### 4) Ряды и интегралы Фурье

<p>Ряд Фурье для периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2\pi</math></p>	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ где}$ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$
<p>Ряд Фурье для четной периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2\pi</math></p>	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где}$ $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$
<p>Ряд Фурье для нечетной периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2\pi</math></p>	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где}$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$
<p>Ряд Фурье для периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2l</math></p>	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right), \text{ где}$ $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx.$

<p>Ряд Фурье для четной периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2l</math></p>	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l}, \text{ где}$ $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx.$
<p>Ряд Фурье для нечетной периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2l</math></p>	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi nx}{l}, \text{ где}$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx.$
<p>Ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2\pi</math></p>	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ где}$ $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx.$
<p>Ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции <math>f(x)</math> с периодом <math>T = 2l</math></p>	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi nx}{l}}, \text{ где}$ $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{\pi nx}{l}} dx.$