Ряды

1) Числовые ряды с положительными членами

Необходимое условие сходимости	Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$	
Достаточные условия сходимости	1. <u>Предельный признак сравнения:</u> если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l \neq 0,$ то оба ряда сходятся, или оба расходятся.	$u_n = \dfrac{P_к(n)}{Q_m(n)}$
	2. <u>Признак Даламбера:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l,$ $l<1$ – ряд сходится, $l>1$ – ряд расходится, $l=1$ – доп. исследование .	$(n!)$ или (a^n)
	3. <u>Радикальный признак Коши:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$ $l<1$ – ряд сходится, $l>1$ – ряд расходится, $l=1$ – доп. исследование	$u_n = (\ldots)^n$
	4. <u>Интегральный признак Коши:</u> Если $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то и ряд сходится (расходится). $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} \text{const} \Rightarrow \text{сходится} \\ \pm\infty \Rightarrow \text{расходится} \end{cases}$	Можно вычислить $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, где $f(n) = u_n \ \forall n$

<u>Частные случаи</u>

I. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p>1 \\ \text{расходится, если } p \le 1 \end{cases}$$

II. Ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \text{сходится, если } |q|<1 \\ \text{расходится, если } |q| \ge 1 \end{cases}$$

2) Знакочередующиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (*)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Расходится → Признак Лейбница: + → Ряд (*) сходится условно; - → Ряд (*) расходится

Сходится → Ряд (*) сходится абсолютно

Признак Лейбница:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots,\ u_n > 0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

3) Степенные ряды: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Радиус сходимости	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}$.
Область сходимости	$\lvert x \rvert < R$ или $\lvert x-x_0 \rvert < R$

4) Ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$
Ряд Фурье для четной периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$ где $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx.$
Ряд Фурье для нечетной периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$ где $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$
Ряд Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l})$, где $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$ $b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$
Ряд Фурье для четной периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},$ где $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$
Ряд Фурье для нечетной периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{l},$ где $b_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$
Ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$	$f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$, где $c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx.$
Ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$	$f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{\pi nx}{l}}$, где $c_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{l}}dx.$