## Операционное исчисление. Преобразование Лапласа

Единичная функция Хевисайда: $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

Интеграл Лапласа: $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ .

### Свойства преобразования Лапласа

Если $f(t)\to F(p)$, а $g(t)\to G(p)$, то

**1**. Линейность: $\alpha f(t)+\beta g(t)\to \alpha F(p)+\beta G(p)$, где $\alpha,\beta\in £$

**2**. Теорема подобия: $f(\alpha t)\to \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$

**3**. Теорема запаздывания: $f(t-\tau)\eta(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p)$

**4**. Теорема смещения: $e^{p_0 t}f(t)\to F(p-p_0)$

**5**. Дифференцирование оригинала:

$f'(t)\to pF(p)-f(0)$.

$f''(t)\to p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$,……..,

$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(0)$

**6**. Дифференцирование изображения:

$F'(p)\leftarrow -t\cdot f(t)$,

$F''(p)\leftarrow t^2\cdot f(t)$,………..,

$F^{(n)}(p)\leftarrow (-1)^n t^n\cdot f(t)$

**7**. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\to \frac{F(p)}{p}$

**8**. Интегрирование изображения: $\frac{f(t)}{t}\to \int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$

**9**. Теорема умножения (теорема о свертке):

$F_1(p)F_2(p)\leftarrow f_1(t)*f_2(t)$, де

$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ -свертка функций

### Таблица изображений основных функций

| | |
|---|---|
| $1\to\frac{1}{p}$ | $e^{\alpha t}\sin\beta t\to\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$ |
| $e^{\alpha t}\to\frac{1}{p-\alpha}$ | $e^{\alpha t}\cos\beta t\to\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$ |
| $\sin\beta t\to\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ | $e^{\alpha t}sh\beta t\to\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$ |
| $\cos\beta t\to\frac{p}{p^2+\beta^2}$ | $e^{\alpha t}ch\beta t\to\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$ |
| $sh\beta t\to\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$ | $t\sin\beta t\to\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$ |
| $ch\beta t\to\frac{p}{p^2-\beta^2}$ | $t\cos\beta t\to\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$ |
| $t^n\to\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $tsh\beta t\to\frac{2p\beta}{(p^2-\beta^2)^2}$ |
| $e^{\alpha t}t^n\to\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$ | $tch\beta t\to\frac{p^2+\beta^2}{(p^2-\beta^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)\to\frac{1}{(p^2+\beta^2)^2}$ | |

$$ch z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$