Лекції 9,10

Диференціювання функції багатьох змінних

Означення функції багатьох змінних

Функції однієї незалежної змінної не охоплюють всі залежності, існуючі в природі. Тому природно розширити відоме поняття функціональної залежності і ввести поняття функції декількох змінних.

Будемо розглядати функції двох змінних, так як всі найважливіші факти теорії функції декількох змінних спостерігаються вже на функціях двох змінних. Ці факти узагальнюються на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Означення. Нехай задано множина D впорядкованих пар чисел $(x;y)$. Якщо кожній парі $(x;y)$ значень двох незалежних змінних величин x і y з деякої області їх змінення D ставиться у відповідність за деяким законом певне значення величини $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що z - **функція двох незалежних змінних**, що визначена в області D.

Символічно функція двох незалежних змінних позначається так:

$$z = f(x;y).$$

При цьому x і y називаються незалежними змінними (аргументами), а z – залежною змінною (функцією).

Областю визначення функції $z = f(x;y)$ називається множина точок $(x;y)$ площини xOy, у яких задана функція набуває певного дійсного значення.

Безліч значень, які приймає z в області визначення, називається областю значень цієї функції, позначається $E(f)$.

Прикладом функції двох змінних може служити площа S прямокутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють x і y: $S = x \cdot y$. Областю визначення цієї функції є множина $\{(x;y) \ |x > 0, y > 0\}$.

Значення функції $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0;y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$ і називають **частинним значенням функції**.

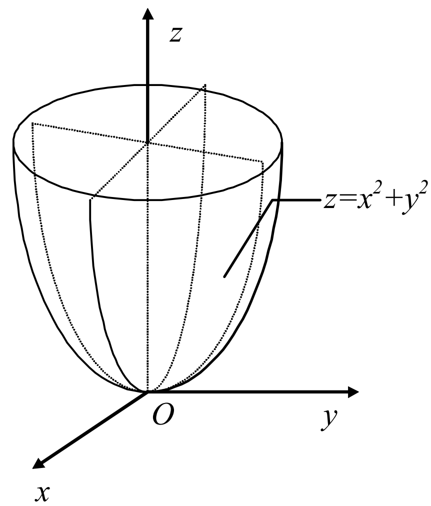
Приклад. Знайти значення функції $z = 2x^2 + 3xy$ в точці $M_0(1;2)$

$z_{M_0} = z(1;2) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 8$

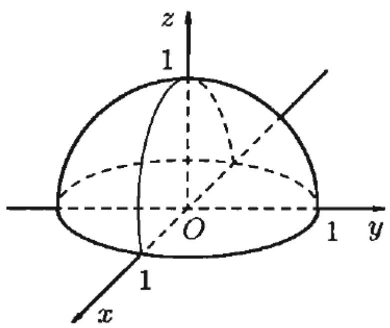
Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами: таблицею, аналітично, графіком.

Аналогічно визначається функція будь-якого скінченного числа незалежних змінних $u = f(x;y;z;...;t)$.

Означення. ***Графіком функції*** двох змінних називається множина точок трьохмірного простору $(x;y;z)$, апліката z яких зв'язана с абсцисою x и ординатою y функціональним співвідношенням $z = f(x,y)$. Графік функції двох змінних $z = f(x;y)$ представляє собою деяку поверхню в трьохмірному просторі.



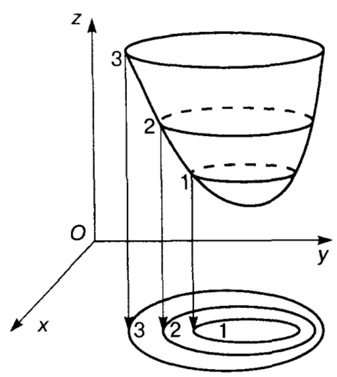
Наприклад, графіком функції $z = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання.



Функція $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ має область визначення коло $x^2+y^2\le 1$ і зображується верхньою полусферою с центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=1$

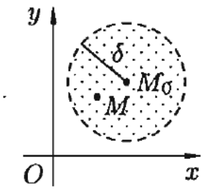
Формально графік можна визначити і для $n>2$ числа змінних. В цьому випадку він називається гіперповерхньою в $(n+1)$- мірному просторі. Про цей графік можна говорити тільки абстрактно – зобразити його на рисунку не є можливим.

Означення. Лінією рівня функції $z=f(x;y)$ називається лінія на площині XOY, в кожній точці якої функція приймає одне й теж значення. Рівняння лінії рівня $f(x;y)=c$, де c - стала.



Границя функції двох змінних

Означення. Множина усіх точок $M(x;y)$ площини, координати яких Задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, називається δ - околом точки $M_0(x_0;y_0)$.



Іншими словами δ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$ - це усі внутрішні точки круга с центром $M_0(x_0;y_0)$ і радіусом δ.

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, окрім, бути може, самої точки.

Означення. Число A називається **границею функції** $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$ і $y\to y_0$ (або, що теж саме, при $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), якщо для любого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що для усіх $x\neq x_0$, $y\neq y_0$, що задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ виконується нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записують:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \quad \text{або} \quad A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Зауваження.

З означення випливає, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка M прямує до точки M_0 (кількість таких напрямів нескінченна; для функцій однієї змінної $x\to x_0$ лише по двох напрямах).

Приміром, функція $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ має різні границі вздовж різних променів $y=kx$, коли $x\to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Частинні похідні функції двох змінних

Розглянемо функцію $z=f\left(x;y\right)$. Нехай незалежна змінна y прийняла стале значення y_0.

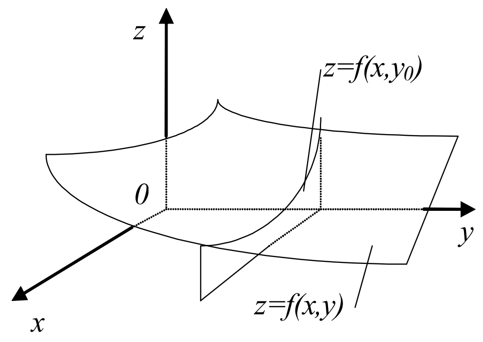


Рис..2.

Придамо незалежній змінній приріст Δx. Тоді функція z отримає приріст, який називають *частинним приростом* z *по* x і позначають через $\Delta_x z$ і обчислюють за формулою: $\Delta_x z = f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x,y\right)$.

Аналогічно, якщо x зберігає постійне значення x_0, а y придамо приріст Δy, то z отримує приріст, що називають *частинним приростом* z *по* y. Цей приріст позначають символом $\Delta_y z$ і обчислюють за формулою:

$$\Delta_y z = f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right).$$

Якщо аргументу x придати приріст Δx, а аргументу y – приріст Δy, то функція $z=f\left(x;y\right)$ отримає приріст Δz, який називається *повним приростом* функції і визначається формулою:

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right).$$

Слід відмітити, що повний приріст не дорівнює сумі частинних, тобто $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Означення. ***Частинною похідною за змінною*** x функції $z=f\left(x;y\right)$ називається границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, якщо вона існує.

Частинна похідна за змінною x функції $z=f\left(x;y\right)$ позначається одним з символів

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким чином, за означенням, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$.

Аналогічно, ***частинна похідна за змінною*** y функції $z = f\left(x;y\right)$ визначається як границя $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

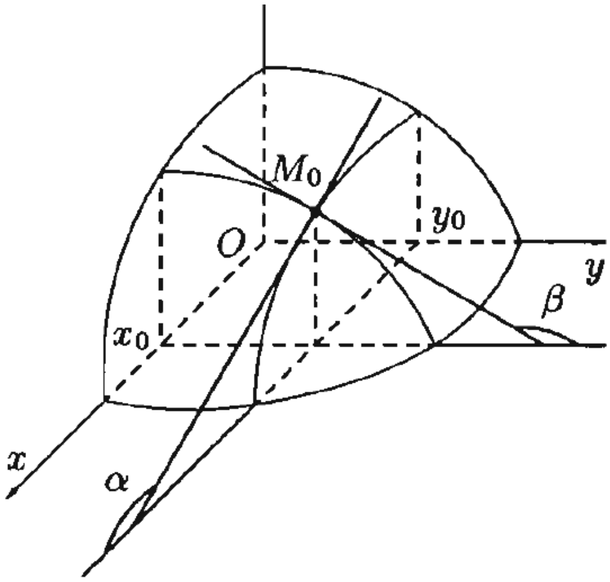
Частинна похідна за y функції $z = f\left(x;y\right)$ позначається одним з символів

$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким чином, за означенням, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$.

Таким чином, частинна похідна функції кількох (двох, трьох і більше) змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних за умови сталості значень інших незалежних змінних.

Графіком функції $z = f\left(x;y\right)$ є деяка поверхня. Графік функції $z = f\left(x;y_0\right)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, робимо висновок, що $f'_x\left(x_0;y_0\right) = tg\alpha$ кут між віссю Ox (додатний напрямок) і дотичною, що проведена до кривої $z = f\left(x;y_0\right)$ в точці $M_0\left(x_0;y_0;f\left(x_0;y_0\right)\right)$.
Аналогічно, $f'_y\left(x_0;y_0\right) = tg\beta$



Помітивши, що $\Delta_x z$ обчислюється при фіксованому y, а $\Delta_y z$ – при фіксованому x, визначення частинних похідних можна сформулювати наступним чином: ***частинною похідною за змінною x*** функції $z = f\left(x;y\right)$ називається похідна за x, обчислена за припущенням, що y – стала. ***Частинною похідною за*** y функції $z = f\left(x;y\right)$ називається похідна за y, обчислена за припущенням, що x – стала.

Останні означення дозволяють застосовувати для обчислення частинних похідних правила знаходження похідної для функції однієї змінної.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x + 5y + 6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_x = 3 \cdot 1 + 0 + 6y \cdot 1 = 3 + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_y = 0 + 5 \cdot 1 + 6x \cdot 1 = 5 + 6x$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = 4x^2 + 8y^4 - 10xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_x = 4 \cdot 2x + 0 - 10y \cdot 1 = 8x - 10y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_y = 0 + 8 \cdot 4y^3 - 10x \cdot 1 = 32y^3 - 10x$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z = 2xy + y^3$ в т. $M_0\left(2;1\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2xy + y^3\right)'_x = 2y \cdot 1 + 0 = 2y \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(2;1)} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2xy + y^3\right)'_y = 2x \cdot 1 + 3y^2 \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(2;1)} = 4 + 3 = 7$$

Зауваження. Частинні похідні функції будь-якого числа змінних визначаються аналогічно.

Повний диференціал функції багатьох змінних

Повним диференціалом функції $z = f\left(x;y\right)$ в точці M_0 називається головна частина повного приросту функції $z = f\left(x;y\right)$, лінійна відносно приростів аргументів. Повний диференціал обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо формулу

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

Частинні похідні другого порядку

Нехай для функції $z = f(x;y)$ визначені частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які, в загальному випадку також є функціями змінних x і y. Отже, від цих функцій можна знову знайти частинні похідні як за змінною x, так і за змінною y. Ці похідні називаються ***частинними похідними другого порядку*** функції $z = f(x;y)$.

Для похідних другого порядку застосовують наступні позначення:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$– функція диференціюється спочатку по x, а результат потім диференціюється по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$– функція диференціюється спочатку по y, а результат потім диференціюється по x.

Останні дві похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними**.

.

Теорема. Якщо частинні похідні другого порядку неперервні, то мішані похідні рівні між собою за умови їх неперервності:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1)'_y = -6x^2 y^2 + 5y^4.$$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 - 4xy^3)'_x = 12x^2 - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_y = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ означають формулою

$$\boxed{d^2 z = d(dz).}$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні і змінні x та y незалежні, то

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m-го порядку* функції z, який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1} z),}$$

маємо аналогічну формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,}$$

Похідна за напрямом

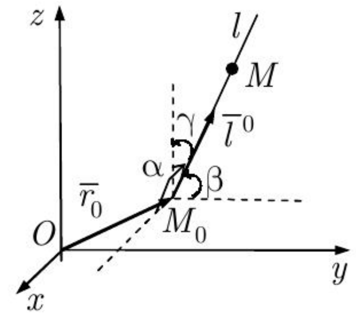
Будь-який напрям l у просторі можна задати одиничним вектором

$$\overline{l}^{0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де α, β, γ — кути, утворені напрямом l з осями Ox, Oy і Oz.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ означена в деякому околі точки M_0 з радіусом вектором

$$\overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}.$$



Похідною функції $u = f\left(x, y, z\right)$ за даним напрямом $\vec{l}$ в точці M_0 називається границя $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{u(M)-u(M_0)}{M_0M}$, яка позначається $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ або $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Тут $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $M_0\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z\right)$, $M_0M = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Отже, за означенням $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{u(M)-u(M_0)}{M_0M}$.

Якщо функція $u = f\left(x, y, z\right)$ диференційована, то має місце формула

$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Приклад. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Розв’язування прикладу

1. **Похідна функції** $u = f(x, y, z)$ **за напрямом** $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. *Знайдемо частинні похідні заданої функції $u(x,y,z)$ у точці $M(1;2;1)$.*

Вважаючи y і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\frac{2}{1+4+1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Вважаючи x і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u'_y=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Вважаючи x і y сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=u'_z=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

3. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}=(2;4;4)$.

$$\left|\vec{l}\right|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6;\ \cos\alpha=\frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ \cos\beta=\frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=\frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

4. Знайдемо шукану похідну.

За формулою $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma$ знаходимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{9}.$$

<u>Скорочений запис</u> розв’язання прикладу

Знайти похідну функції $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$.

1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\frac{2}{1+4+1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;

2) $\vec{l}=(2;4;4)\Rightarrow\left|\vec{l}\right|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$,

$\cos\alpha=\frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{3}$;

3) $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$.

Градієнт функції.

Означення. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі відповідні частинні похідні даної функції:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z} .$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна у напрямі градієнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\vec{l} = grad u$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = \left|grad u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} .$$