

Невизначений інтеграл

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо $F(x)$ неперервна, якщо $F(x)$ є диференційована на цьому проміжку, і справджується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є первісною для функції $y = x^2$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тому що на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є неперервною та диференційованою, причому $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ справджується рівність $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Очевидно, що первісними є також будь які функції

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \text{ де } C - \text{ стала, оскільки}$$

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x).$$

Зауваження. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

Теорема 1. (про первісні неперервних функцій). Будь-яка неперервна на проміжку X функція має на ньому первісну.

Теорема 2. (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на X , то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x) + C$ є також первісною функції $f(x)$ на X

Теорема 3. (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

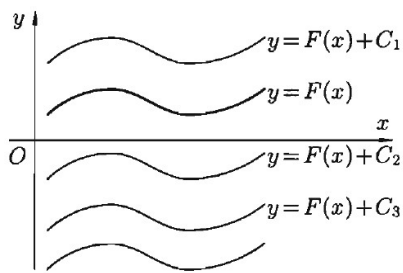
Означення. *Невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку X називається множина всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку. Позначається невизначений інтеграл символом $\int f(x)dx$. Отже, за визначенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Знак \int – знак інтеграла, $f(x)$ називають підінтегральною функцією, букву x називають змінною інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Зауваження. Невизначений інтеграл являє собою множину функцій $F(x)+C$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла, тобто множини всіх первісних деякої функції, називається **інтегруванням** даної функції.



С геометричній точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність кривих, зміщених відносно друг друга вздовж осі Oy .

Слід відзначити, що якщо похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції, може бути і не елементарною, тобто представленою в вигляді скінченної комбінації елементарних функцій.

Це, наприклад, функції $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} , $\sin x^2$, $\cos x^2$. Для подібних функцій роз-

роблені методи, що дозволяють знаходити первісну наближено.

Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

Властивість 1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Зауваження. Завдяки цієї властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність

$$\int (4x^3 + 7)dx = x^4 + 7x + C, \text{ правильна, тому що } (x^4 + 7x + C)' = 4x^3 + 7$$

Властивість 2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Властивість 3. *Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто:*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ або } \int dF(x) = F(x) + C.$$

Властивість 4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто виконується рівність:*

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \text{ де } a \neq 0 - \text{ стала.}$$

Властивість 5. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох або декілька x функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) їх інтегралів:*

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Властивість 6. (Інваріантність формул інтегрування). Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то і $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$, довільна функція, що має неперервну похідну.

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається правильною незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таким чином з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ заміною x на u ($u = \varphi(x)$) отримаємо $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$.

Зокрема, $\int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, $\int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$,

$$\int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

При обчисленні невизначених інтегралів корисно мати на увазі **наступні правила**.

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Користуючись тим, що інтегрування є операція обернена до диференціювання, можна отримати таблицю основних інтегралів. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона буде дорівнювати підінтегральній функції.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

13. $\int shx dx = chx + C$

2. $\int dx = x + C.$

14. $\int chx dx = shx + C$

3. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, (m \neq -1).$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

18. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

$$-a < x < a, a > 0.$$

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

23. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(5 \cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

$$\begin{aligned} \int \left(5 \cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= 5 \int \cos x dx - 9 \int x^2 dx + 7 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= 5 \sin x - 3x^3 + 7 \operatorname{arcsin} x + C \end{aligned}$$