Лекція 3

Невизначений інтеграл

Означення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ неперервна, якщо $F(x)$ є диференційована на цьому проміжку, і справджується рівність $F'(x)=f(x)$.

Приклад. Функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ є первісною для функції $y=x^2$ в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тому що на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ є неперервною та диференційованою, причому $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ справджується рівність $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$.

Очевидно, що первісними є також будь які функції

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, де C – стала, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2=f(x).$$

Зауваження. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

Теорема 1. (про первісні неперервних функцій). Будь-яка неперервна на проміжку X функція має на ньому первісну.

Теорема 2. (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на X, то для будь-якого числа $C\in\mathbb{R}$ функція $F(x)+C$ є також первісною функції $f(x)$ на X

Теорема 3. (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

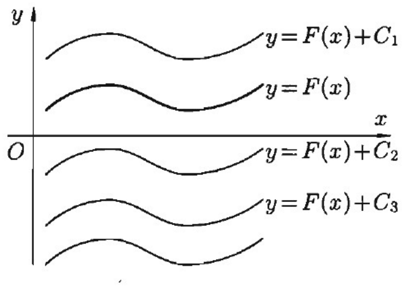
Означення. ***Невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на проміжку X називається множина всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку. Позначається невизначений інтеграл символом $\int f(x)dx$. Отже, за визначенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Знак $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ називають підінтегральною функцією, букву x називають змінною інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Зауваження. Невизначений інтеграл являє собою множину функцій $F(x)+C$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла, тобто множини всіх первісних деякої функції, називається **інтегруванням** даної функції.



С геометричній точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність кривих, зміщених відносно друг друга вздовж осі Oy.

Слід відзначити , що якщо похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції, може бути і не елементарною, тобто представленою в вигляді скінченної комбінації елементарних функцій. Це, наприклад, функції $\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}, e^{-x^2}$, $\sin x^2, \cos x^2$. Для подібних функцій розроблені методи, що дозволяють знаходити первісну наближено.

Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

Властивість 1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Зауваження. Завдяки цієї властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність

$\int\left(4x^3+7\right)dx = x^4+7x+C$, правильна, тому що $\left(x^4+7x+C\right)' = 4x^3+7$

Властивість 2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Властивість 3. *Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто:*

$$\int F'(x)dx = F(x)+C \quad \text{або} \quad \int dF(x) = F(x)+C.$$

Властивість 4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто виконується рівність:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ де } a \neq 0 \text{ - стала.}$$

Властивість 5. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми* (*різниці*) *двох або декілька х функцій дорівнює алгебраїчній сумі* (*різниці*) *їх інтегралів*:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Властивість 6. *(Інваріантність формул інтегрування). Якщо* $\int f(x)dx = F\left(x\right) + C$, *то і* $\int f(u)du = F\left(u\right) + C$, *де* $u = \varphi\left(x\right)$, *довільна функція, що має неперервну похідну.*

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається правильною незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таким чином з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ заміною x на u ($u = \varphi\left(x\right)$) отримаємо $\int u^3 dx = \frac{u^4}{4} + C$.

Зокрема, $\int \sin^3 x d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, $\int \ln^3 x d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$,

$$\int tg^3 x d\left(tgx\right) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

При обчисленні невизначених інтегралів корисно мати на увазі **наступні правила**.

1. Якщо $\int f(x)dx = F\left(x\right) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

2. Якщо $\int f(x)dx = F\left(x\right) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

3. Якщо $\int f(x)dx = F\left(x\right) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Користуючись тим, що інтегрування є операція обернена до диференціювання, можна отримати таблицю основних інтегралів. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона буде дорівнювати підінтегральній функції.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1).$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

13. $\int shx dx = chx + C$

14. $\int chx dx = shx + C$

15. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

16. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

18. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C.$

19. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

20. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,$

$-a < x < a, a > 0.$

22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

23. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(5\cos x - 9x^2 + \dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

$$\int \left(5\cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 5\int \cos x dx - 9\int x^2 dx + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 5\sin x - 3x^3 + 7arcsix + C$$