Лекція 2

Комплексні числа

Множина дійсних чисел позначається $\mathbb{R}$, а множина комплексних чисел позначається через $\mathbb{C}$. На цій лекції покажемо, як між множинами $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ встановлюється взаємно-однозначна відповідність.

Означення. ***Комплексне число*** – це вираз вигляду: $z = x + iy$ (1)
де x, y - дійсні числа ($x, y \in R$), а i - символ, що називається уявною одиницею, що визначається умовою $i^2 = -1$.

Формула (1) називається **алгебраїчною формою запису комплексного числа**. Число x - називається дійсною частиною комплексного числа z, а число y називається уявною частиною комплексного числа z. Символічно їх позначають так:

$$x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z .$$

Примітка. Слід пам'ятати, що уявна частина будь-якого комплексного числа є число дійсне. Наприклад, $\operatorname{Im}(4-7i) = -7$.

Будь-яке дійсне число можна розглядати як комплексне число, в якого уявна частина дорівнює 0. Справді, при $\operatorname{Im} z = 0$ маємо $z = x$.

Комплексне число $z = iy$, в якому $\operatorname{Re} z = 0$, називають суто уявним числом.

Означення. Комплексне число $z = x + iy = 0$, тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ і $y = 0$.

Означення. Два комплексних числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються **спряженими**.

Означення. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ вважають рівними і записують $z_1 = z_2$, тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

Примітка. Хоча ми визначили, що значить $z_1 = z_2$, запис, наприклад, $z_1 < z_2$ не має сенсу, тому що комплексні числа неможна порівнювати!

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2 - 2x + 10 = 0$.

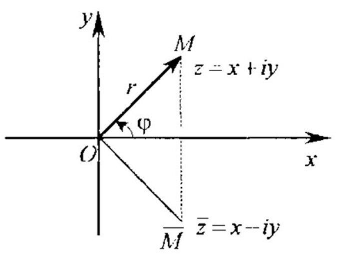
Розв'язок: Розв'яжемо це квадратне рівняння через дискримінант:

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 6 \cdot i}{2} = 1 \pm 3i$$

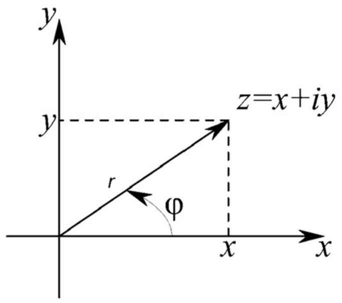
(нагадаємо, що $i^2 = -1$. Пізніше покажемо, що $\sqrt{-1} = i$ має два значення i і $(-i)$).
Отже рівняння $x^2 - 2x + 10 = 0$ має два кореня $x_1 == 1 + 3i$ и $x_2 = 1 - 3i$.
Цей приклад ілюструє теорему в якій стверджується, що якщо многочлен має комплексний корінь, то он має і комплексно спряжений корінь.

Примітка. Число комплексних корнів многочлена с комплексними коефіцієнтами степеня ***n***, враховуючи кратні корні кратну кількість раз, дорівнює ***n***. При цьому, усі чисто комплексні корні (якщо вони є) многочлена с дійсними коефіцієнтами можна розбити на пари спряжёних однакової кратності. Таким чином, многочлен парного степеня з дійсними коефіцієнтами може мати тільки парне число дійсних корнів, а непарного степеня - тільки непарне.



Геометрично комплексне число $z = x + iy$ зображується точкою $M(x; y)$ або вектором $\overrightarrow{OM}$. Площина xOy умовно називається комплексною площиною змінної z, вісь Ox - дійсною віссю, вісь Oy - уявною віссю.

Комплексне число, як деяку точку $M(x; y)$ на комплексній площині, можна задати радіус-вектором r і кутом повороту φ цього вектора (тобто полярними координатами).



Існують формули, що зв'язують координати точки в декартовій системі координат з координатами точки в полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Переходячи до полярних координат отримаємо: $z = x + iy = (r\cos\varphi) + i(r\sin\varphi)$

Таким чином , будь-яке комплексне число може бути записано у вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (2)$$

де φ вимірюється в радіанах і $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

Вираз (2) називають **тригонометричною формою запису комплексного числа**.

Значення r називають **модулем комплексного числа** z. Модуль комплексного числа позначають r або $|z|$ і обчислюють за формулою $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Кут φ, який утворює радіус-вектор з додатним напрямом осі $0x$, називають **аргументом** комплексного числа z і позначають $Argz$.

Модуль комплексного числа визначається однозначно, а аргумент с точністю до доданку вигляду $2k\pi$, $k\in Z$: $Argz=\varphi+2\pi k$, $k\in Z$. Серед нескінченої множини значень $Argz$ є одне значення, яке належить пів інтервалу $(-\pi;\pi]$. Його називають головним значенням аргументу і позначають $\arg z$.

Таким чином. $Argz=\arg z+2\pi k$.

З формул $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ випливає, що $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}$. Тобто аргумент φ може визначатись із співвідношення $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$, з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка $M(x;y)$.

З останнього випливає, що головне значення аргументу обчислюється за формулою:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x>0\ ,\ \left(M(x,y)\in I,\ IV\right);\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x<0,\ y\ge 0,\ \left(M(x,y)\in II\right)\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x<0,\ y<0,\ \left(M(x,y)\in III\right)\\ \dfrac{\pi}{2};\ x=0;\ y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2};\ x=0;\ y<0.\end{cases}$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ і формулу тригонометричної записи комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, отримаємо **показникову форму комплексного числа** z:

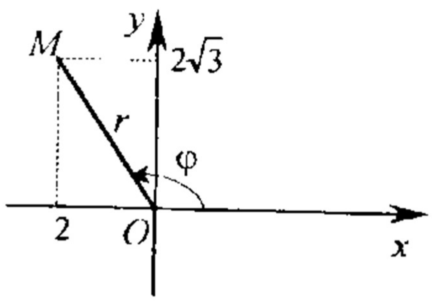
$$z = re^{i\varphi}.$$

Приклад. Для заданого комплексного числа z знайти: 1) дійсну і уявну частини; 2) зобразити число на комплексної площині; 3) знайти модуль і головне значення аргументу; 4) записати це число в тригонометричній та показниковій формі.

$z = -2 + 2\sqrt{3}i$

1) $x = \operatorname{Re} z = -2$, $y = \operatorname{Im} z = 2\sqrt{3}$.

2)



3) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

4) тригонометрична форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$$z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

Показникова форма: $z = re^{i\varphi} = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Дії над комплексними числами.

Для комплексних чисел визначені операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення числа до натурального степеня, добування кореня n-ого степеня, де $n \in \mathbb{N}$. Результатом цих операцій є комплексні числа.

Дії над комплексними числами,заданими в алгебраїчній формі виконуються таким чином:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2) $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $\mathrm{z}_2 \neq 0$

Приклад.

$$\frac{3+4i}{2+5i} = \frac{(3+4i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)} = \frac{6-15i+8i-20i^2}{2^2-(5i)^2} = \frac{26-7i}{29}$$

Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі виконуються за такими правилами:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$
3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - **формула Муавра**.
4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

Виведемо формулу Муавра. Послідовне застосування формули множення в тригонометричній формі дозволяє знаходити степені комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

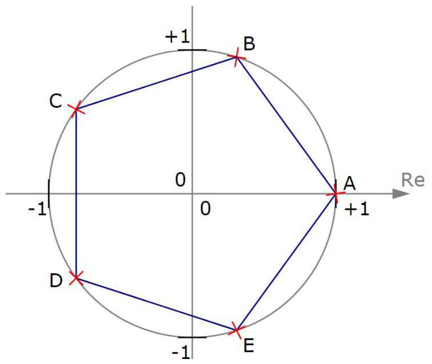
Узагальнюючи отримаємо: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - **формулу Муавра**.

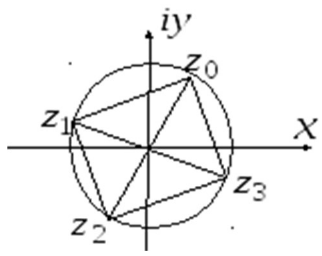
Правило. Для піднесення комплексного числа до ***n***-го степеня ($n \in N$) треба модуль піднести до **n**-го степеня, а аргумент помножити на ***n***.

Означення. Корінь n-го степеня $(n \in N)$ обчислюється за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1).$$

Зауваження. Корінь n-го степеня з комплексного числа z має n різних значень. Точки, яким відповідають значення $\sqrt[n]{z}$, є вершинами правильного n- кутника, який вписаний в коло радіуса $R = \sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат.





Приклад. Знайти усі значення кореня $\sqrt[4]{-1}$.

Рішення.

Зводимо комплексне число z до тригонометричної форми

$z = r(cos\varphi + i\sin\varphi)$

І застосовуємо формулу для визначення значень кореня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$$

Тут $z = -1$. Тоді $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$. $\varphi = \pi$.
Тригонометрична форма: $z = \cos\pi + i\sin\pi$.
Значення заданого кореня отримуємо за формулою:
$z_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}$, де $k = 0,1,2,3$.

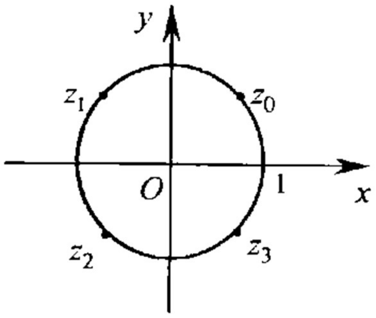
$$k = 0: \quad z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 1: \quad z_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 2: \quad z_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 3: \quad z_3 = \cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 6\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Всі корені знаходяться на колі з центром у точці $z=0$ і радіус якого дорівнює одиниці, і на однаковій відстані один від одного.



Дії множення, ділення, піднесення до степеня над комплексними числами можна здійснювати і тоді, коли вони задані в показниковій формі.

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, z_2 \neq 0.$

3) $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, k = 0,1,2,...(\text{n -1}).$

Застосування.

За допомогою комплексних чисел можна виводити формули для дійсних чисел.

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi$$

З іншої сторони за формулою Муавра $\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Тоді $\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Прирівняємо дійсні і уявні частини:

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi i\sin\varphi + 3\cos\varphi i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$