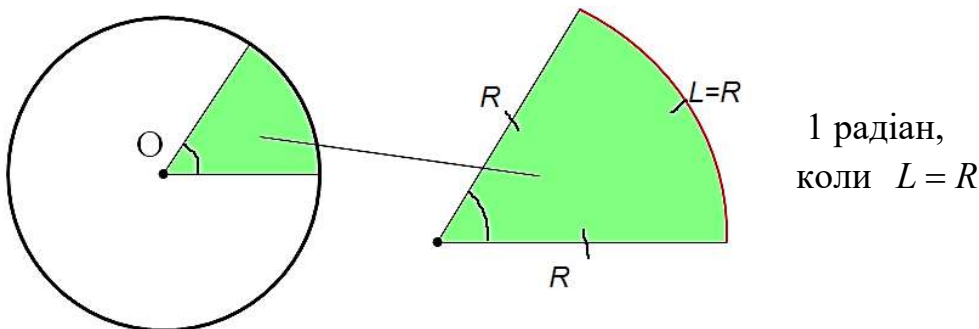


Радіанна мера кутів. Тригонометричні функції

Існують різні одиниці вимірювання кутів.

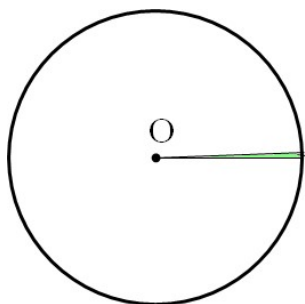
У міжнародній системі одиниць СІ використовується спосіб вираження величини кута, при якому кут — безрозмірна величина - радіан. При цьому величина кута за означенням дорівнює відношенню довжини дуги L кола з центром у вершині кута і будь-яким радіусом до величини цього радіуса R . Це відношення не залежить від вибору радіуса. Кут величиною 1 радіан визначається як такий, при якому відношення довжини дуги до радіуса дорівнює одиниці, тобто довжина дуги дорівнює радіусу. Саме радіан, як міру величини кута, ми будемо використовувати в курсі вищої математики.



Загалом плоский кут вимірюють в градусах, мінутах, секундах.

В елементарній геометрії вимірюють кути в градусах транспортиром.

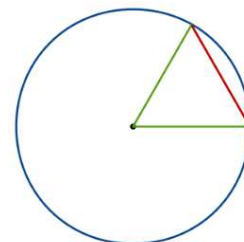
Градус - це $1/360$ частина кола.



$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ частина кола}$$

Чому поділили саме на 360? А не на 100, наприклад. Причина вибору градуса як одиниці виміру кутів невідома. Одна з теорій припускає, що це пов'язано з тим, що 360 – приблизну кількість днів в році.

Інша теорія говорить, що вавилоняни поділили коло на 6 частин(використовуючи кут рівностороннього трикутника як базу), кожна з яких ділилася на 60 частин, слідуючи своїй шістдесятковій системі числення.



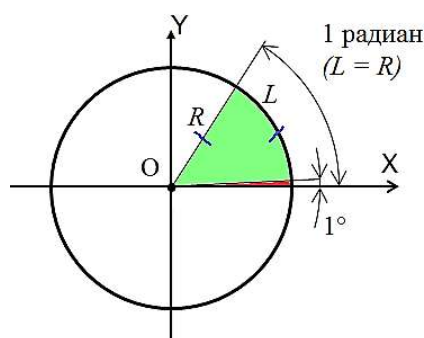
Відповідно до цієї ж шістдесяткової системи числення градус ділять на 60 мінут (від лат. minutus — маленький, дрібний; позначається штрихом х'), а мінуту — на 60 секунд (позначається двома штрихами у").

Наприклад, кут $\alpha = 42^{\circ}35'12''$.

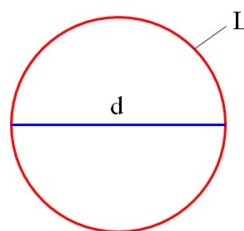
Як співвідносяться між собою градуси і радіани?

Зрозуміло, що градус менше радіана.

Скільки градусів в одному радіані?



Слід нагадати число π . Ще в Давньому Єгипті задавали питання: у скільки разів довжина кола більше її діаметра? Вимірювали різними способами ... Кожен раз виходило трохи більше трьох.



$L/d = ?$

$$\frac{L}{d} \approx 3,14$$

Після них математики різних країн продовжували обчислювати це співвідношення аж до 18 століття! Поки в 1767 році Йоганн Ламберт не довів ірраціональність цього числа (тобто остаточно довів, що, як би дрібно ні нарізати окружність на рівні шматочки, з таких шматочків скласти точно довжину діаметра не можна. Принципово не можна. Тільки лише приблизно).

У скільки разів довжина кола більше її діаметра встановили давним-давно. Але, знову ж таки, приблизно ... У 3,1415926 ... рази. Після коми - нескінченне число цифр без жодного порядку, без будь-якої логіки. Це число - і є число π ("пі"). π - математична стала, що дорівнює відношенню довжини кола до її діаметру.

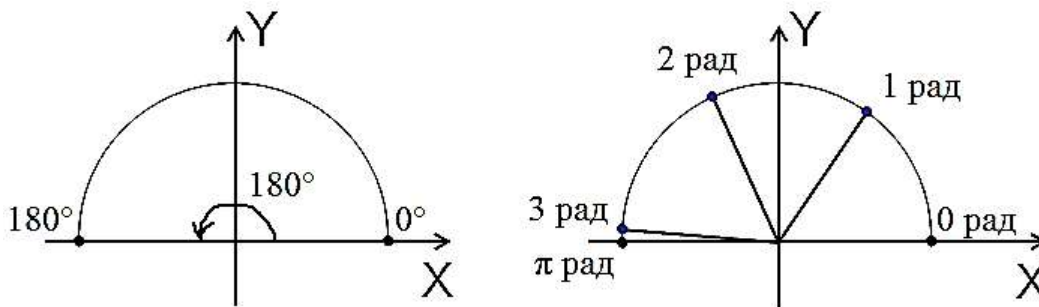
$\pi = \frac{L}{d}$. Позначається буквою грецького алфавіту « π ».

$$\pi \approx 3,1415926...$$

Як було сказано вище $\pi = \frac{L}{d}$ або $\pi = \frac{L}{2R}$ Значить, довжина кола, виражена через радіус дорівнює $L = 2\pi R$. Половина довжини кола $\frac{L}{2} = \pi R$.

Центральному розгорнутому куту, з градусної мірою 180 градусів, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR .

Один радіан - це центральний кут відповідний дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола. Значить, радіанна міра півкола дорівнює π радіан.



Це дозволяє встановити зв'язок між радіанною і градусною мірою, а саме:

$$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ.$$

Звідси $1_{\text{рад}} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57,325^\circ$ і $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад

Із співвідношення $\pi_{\text{радиан}} = 180^\circ$ можна переводити градуси в радіани і радіани в градуси, складаючи пропорції.

Приклад 1. Перевести в радіани 15° . Складемо пропорцію:

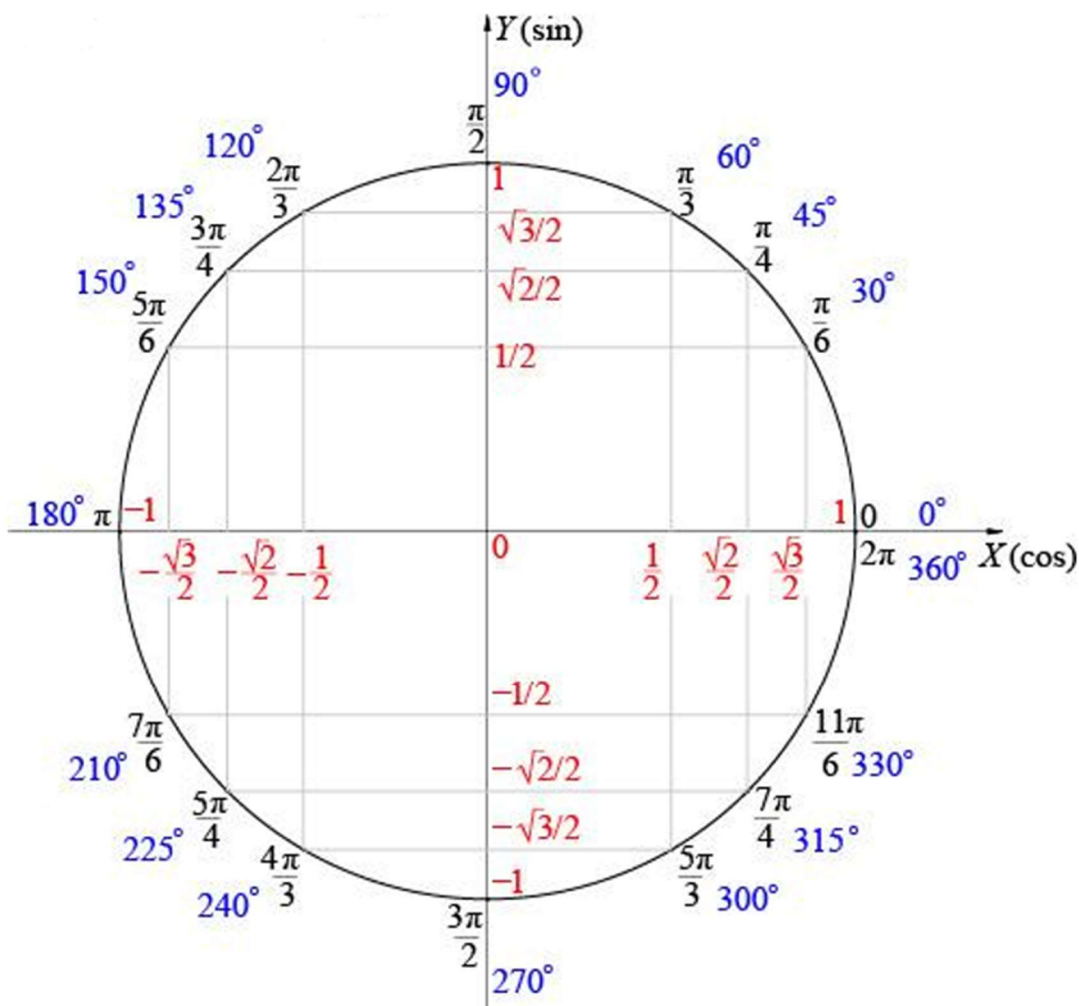
$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$	$x = \frac{15^\circ \cdot \pi_{\text{рад}}}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$ рад
$x_{\text{рад}} - 15^\circ$	

Приклад 2. Перевести в градуси $\frac{5\pi}{6}$ радіан.

$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$	$x = \frac{5\pi_{\text{рад}}}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi_{\text{рад}}} = 150^\circ$
$\frac{5\pi}{6}$ рад - x°	

Зауваження. В математиці значок градусів – пишеться. Завжди і скрізь. Наприклад, $\cos 30^\circ$ - це косинус 30 градусів! А ось значок радіанів ("рад") – не пишеться! Він – мається на увазі. Наприклад, $\sin 5$ – це синус п'яти радіанів!

Тепер побудуємо тригонометричний круг, на якому відзначимо основні кути не тільки в градусах, а і в радіанах. Під основними кутами розуміють $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ і симетричні їм у всіх координатних чвертях.

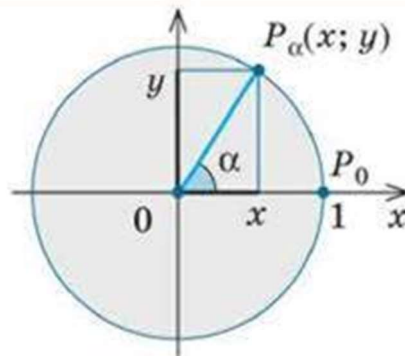


Тригонометричний круг, це коло одиничного радіуса. Застосовуючи його легко знаходити значення $\sin x$ і $\cos x$ основних кутів.

Тригонометричні функції

Дамо визначення синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Ці функції можна визначати або через прямокутний трикутник, або через одиничне коло. Визначимо через одиничне коло.

Синус та косинус можуть бути описані наступним чином: об'єднавши будь-яку точку $(x; y)$ на одиничному колі з початком координат $(0; 0)$, ми отримаємо відрізок, що знаходиться під кутом α відносно додатного напрямку осі абсцис. Тоді:



Синусом кута α називається ордината (y) точки одиничного кола: $\sin \alpha = y$.

Косинусом кута α називається абсциса (x) точки одиничного кола: $\cos \alpha = x$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати точки до її абсциси, тобто

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{де } \cos \alpha \neq 0).$$

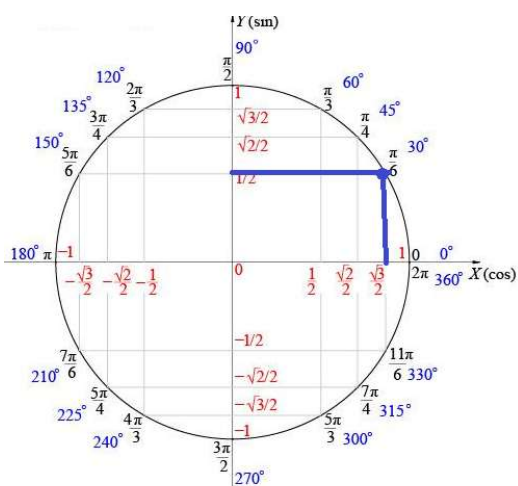
Котангенсом кута α називається відношення абсциси точки до її ординати,

$$\text{тобто } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{где } \sin \alpha \neq 0).$$

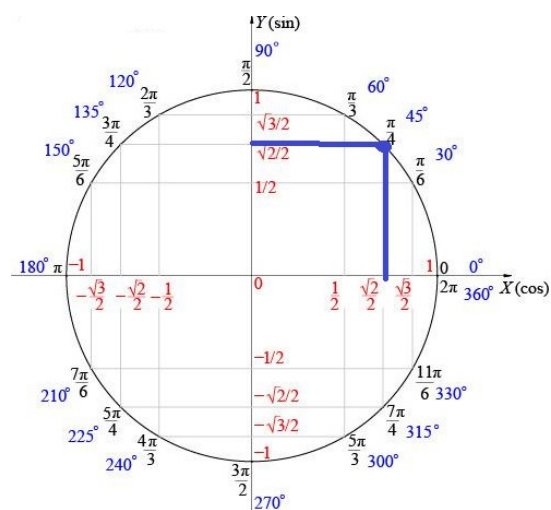
Для обчислення синуса і косинуса від основних кутів треба пам'ятати

зростаючу послідовність з чисел: $0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1$.

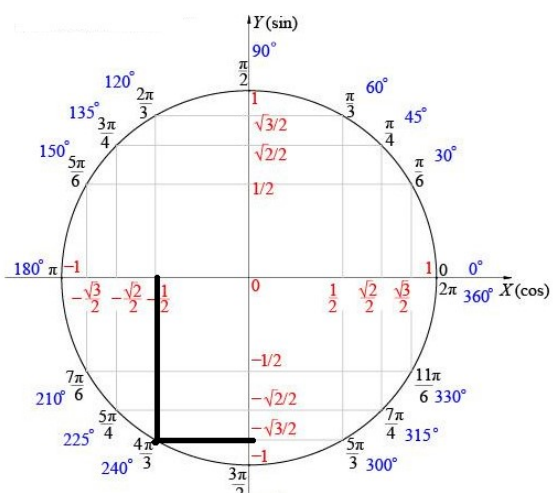
За допомогою тригонометричного кола легко визначати синуси і косинуси основних кутів.



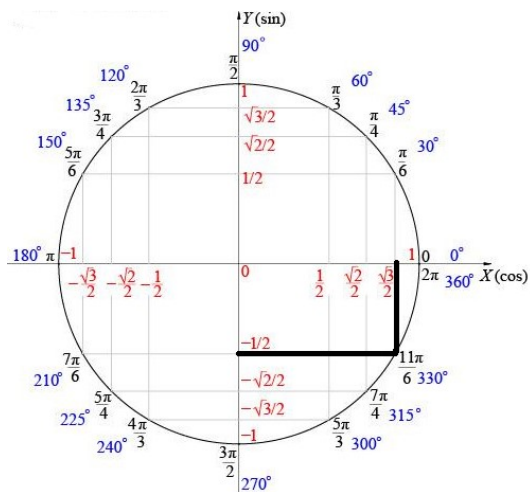
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



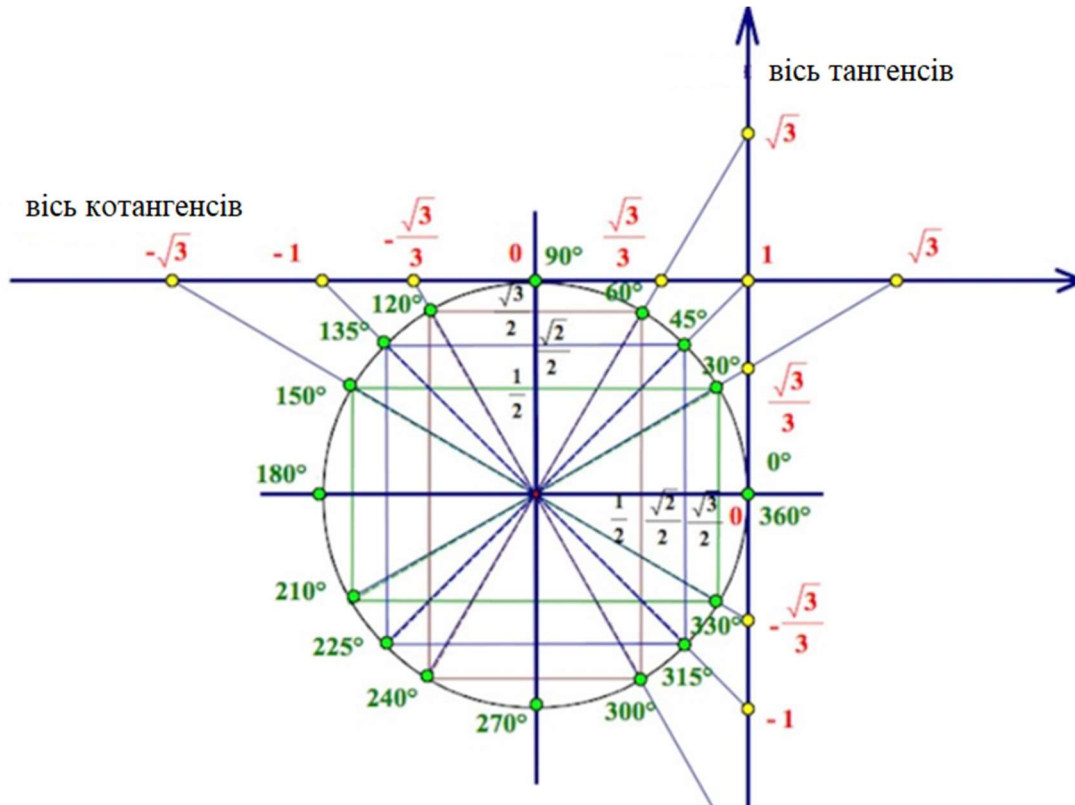
$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Значення $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ можна знаходити із співвідношень $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

або застосовувати одиничне коло і ряд чисел $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}$.



Зауважимо, що $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Обчислимо : $tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $ctg \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

За допомогою одиничного кола можна знаходити значення зворотних тригонометричних функцій

За допомогою тригонометричного кола можна визначати значення обернених тригонометричних функцій: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$. В цих функціях по значенням на осях, знаходимо кут (в радіанах).

При цьому пам'ятаємо, що запис $\arcsin a = \varphi$ ($|a| \leq 1$), позначає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \varphi = a$.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ тому що } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ тому що } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Запис $\arccos a = \varphi$ ($|a| \leq 1$), позначає, що $\varphi \in [0; \pi]$ і $\sin \varphi = a$.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ потому, що } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запис $\operatorname{arctg} a = \varphi$ (a - довільне), позначає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \varphi = a$.

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ тому що } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Загальні відомості про тригонометричні функції

Тригонометричні функції - елементарні функції, які історично виникли при розгляді прямокутних трикутників і виражали залежності довжин сторін цих трикутників від гострих кутів при гіпотенузі (або, що рівнозначно, залежність хорд і висот від центрального кута дуги в колі). Ці функції знайшли широке застосування в самих різних галузях науки. В процесі розвитку математики визначення тригонометричних функцій було розширено, в сучасному розумінні їх аргументом може бути довільне дійсне або комплексне число.

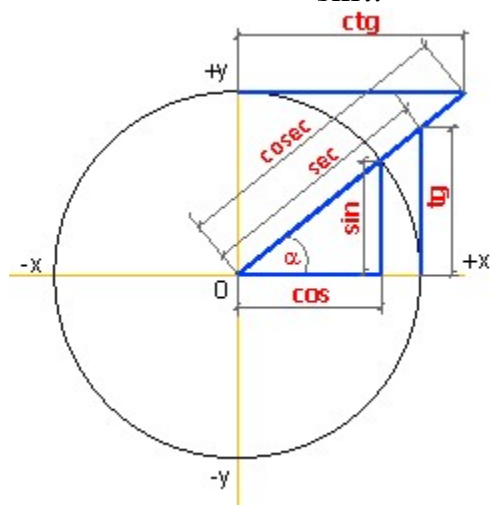
Розділ математики, що вивчає властивості тригонометричних функцій, називається **тригонометрією**.

До тригонометричних функціям традиційно відносять:
прямі тригонометричні функції:

- синус - $\sin x$
- косинус - $\cos x$

похідні тригонометричних функцій:

- тангенс $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ (в іноземній літературі позначення $\tan x$)
- котангенс $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\cot x$)
- секанс $\sec x = \frac{1}{\cos x}$;
- косеканс $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\csc x$)

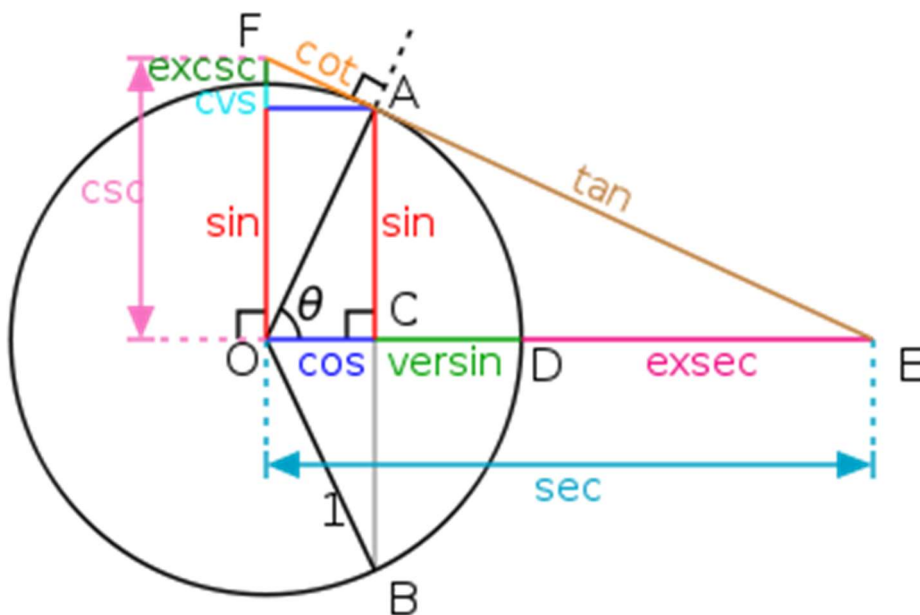


обернені тригонометричні функції:

- арксинус - $\arcsin x$ (в іноземній літературі $\sin^{-1} x$) - кут, синус якого дорівнює x
- арккосинус - $\arccos x$ (в іноземній літературі $\cos^{-1} x$)
- арктангенс - $\operatorname{arctg} x$ (в іноземній літературі $\tan^{-1} x$ або $\arctan x$)
- арккотангенс - $\operatorname{arcctg} x$ (в іноземній літературі $\operatorname{arc} \cot x$)
- арксеканс - $\operatorname{arc} \sec x$
- арккосеканс - $\operatorname{arccosec} x$ (в іноземній літературі $\operatorname{arc} \csc x$)

Тригонометричні функції, що дуже рідко використовують:

- Версинус $\operatorname{versin} x = 1 - \cos x$ (інші назви: синус-верзус, синус версус).
- коверсинус $\operatorname{vercos} x = 1 - \sin x$ (інші назви: косинус-верзус, косинус версус).
- Гаверсинус $\operatorname{haversin} x = \frac{\operatorname{versin} x}{2}$
- Гаверкосинус $\operatorname{havercos} x = \frac{\operatorname{vercos} x}{2}$
- Ексеканс $\operatorname{exsec} x = \sec x - 1$
- Екскосеканс $\operatorname{excsc} x = \operatorname{cosec} x - 1$



відрізок CD - версинус, DE - ексеканс.

Застосування

Версинус, коверсиинус і гаверсинус були зручні для розрахунків з використанням логарифмів, оскільки вони всюди невід'ємні, проте в зв'язку з розвитком обчислювальних засобів ця область застосування неактуальна. В даний час ці функції використовуються для опису відповідних сигналів в електроніці (наприклад, в функціональних генераторах). Гаверсинус також сьогодні використовується в навігаційних розрахунках для уникнення помилок округлення в обчислювальних системах з обмеженою розрядністю.