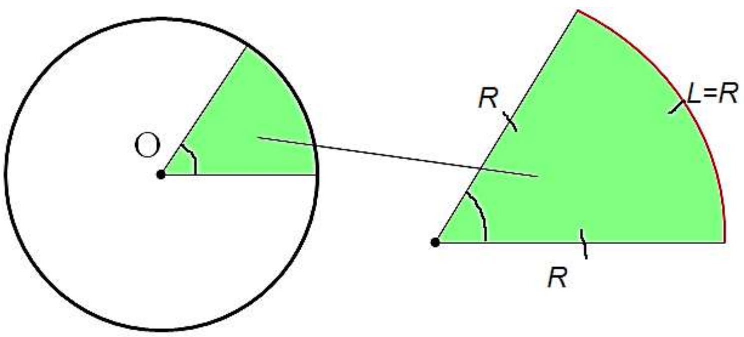
Лекція 1.

Радіанна мера кутів. Тригонометричні функції

Існують різні одиниці вимірювання кутів.

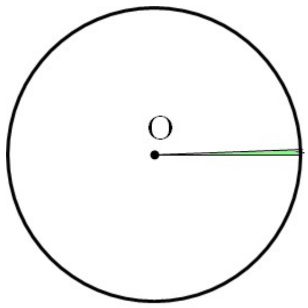
У міжнародній системі одиниць СІ використовується спосіб вираження величини кута, при якому кут — безрозмірнісна величина - радіан. При цьому величина кута за означенням дорівнює відношенню довжини дуги L кола з центром у вершині кута і будь-яким радіусом до величини цього радіуса R. Це відношення не залежить від вибору радіуса. Кут величиною 1 радіан визначається як такий, при якому відношення довжини дуги до радіуса дорівнює одиниці, тобто довжина дуги дорівнює радіусу. Саме радіан, як міру величини кута, ми будемо використовувати в курсі вищої математики.



1 радіан, коли $L = R$

Загалом плоский кут вимірюють в градусах, мінутах, секундах.

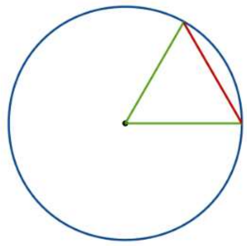
В елементарній геометрії вимірюють кути в градусах транспортиром. Градус - це 1/360 частина кола.



$1^\circ = \dfrac{1}{360}$ частина кола

Чому поділили саме на 360? А не на 100, наприклад. Причина вибору градуса як одиниці виміру кутів невідома. Одна з теорій припускає, що це пов'язано з тим, що 360 – приблизну кількість днів в році.

Інша теорія говорить, що вавилоняни поділили коло на 6 частин(використовуючи кут рівностороннього трикутника як базу), кожна з яких ділилася на 60 частин, слідуючи своїй шістдесяткової системи числення.



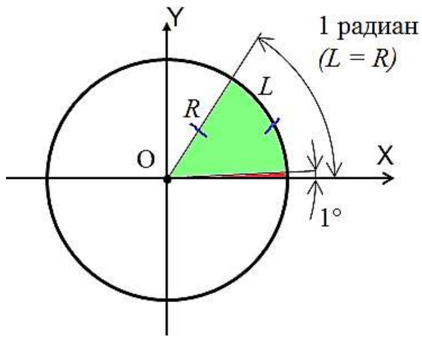
Відповідно до цієї ж шістдесяткової системи числення градус ділять на 60 мінут (від лат. minutus — маленький, дрібний; позначається штрихом x'), а мінуту — на 60 секунд (позначається двома штрихами y'').

Наприклад, кут $\alpha = 42^{\circ}35'12''$.

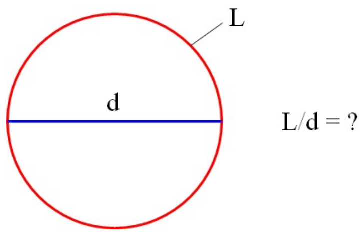
Як співвідносяться між собою градуси і радіани?

Зрозуміло, що градус менше радіана.

Скільки градусів в одному радіані?



Слід нагадати число π. Ще в Давньому Єгипті задавали питання: у скільки разів довжина кола більше її діаметра? Вимірювали різними способами ... Кожен раз виходило трохи більше трьох.



$$\frac{L}{d} \approx 3{,}14$$

Після них математики різних країн продовжували обчислювати це співвідношення аж до 18 століття! Поки в 1767 році Йоганн Ламберт не довів ірраціональність цього числа (тобто остаточно довів, що, як би дрібно ні нарізати окружність на рівні шматочки, з таких шматочків скласти точно довжину діаметра не можна. Принципово не можна. Тільки лише приблизно).

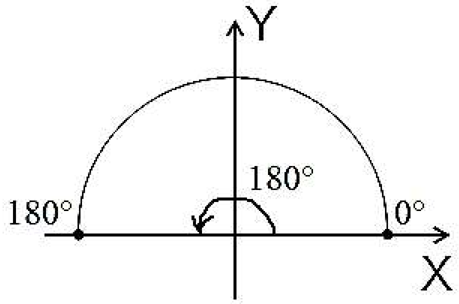
У скільки разів довжина кола більше її діаметра встановили давним-давно. Але, знову ж таки, приблизно ... У 3,1415926 ... рази. Після коми - нескінченне число цифр без жодного порядку, без будь-якої логіки. Це число - і є число π ("пі"). π - математична стала, що дорівнює відношенню довжини кола до її діаметру. $\pi = \dfrac{L}{d}$. Позначається буквою грецького алфавіту «π».

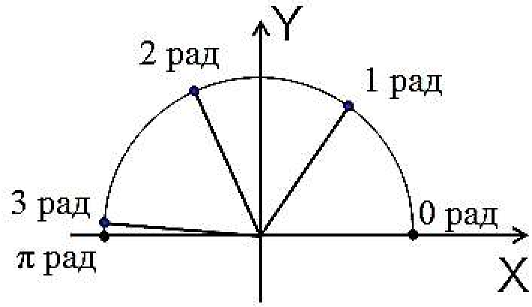
$$\pi \approx 3{,}1415926...$$

Як було сказано вище $\pi = \dfrac{L}{d}$ або $\pi = \dfrac{L}{2R}$ Значить, довжина кола, виражена через радіус дорівнює $L = 2\pi R$. Половина довжини кола $\dfrac{L}{2} = \pi R$.

Центральному розгорнутому куту, з градусної мірою 180 градусів, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR.

Один радіан - це центральний кут відповідний дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола. Значить, радіанна міра півкола дорівнює π радіан.





Це дозволяє встановити зв’язок між радіанною і градусною мірою, а саме:

$$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ .$$

Звідси $\quad 1_{\text{рад}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx \dfrac{180^\circ}{3,14} \approx 57,325^\circ \quad$ і $\quad 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\text{рад}$

Із співвідношення $\pi_{\textit{радиан}} = 180^\circ$ можна переводити градуси в радіани і радіани в градуси, складаючи пропорції.

Приклад 1. Перевести в радіани 15°. Складемо пропорцію:

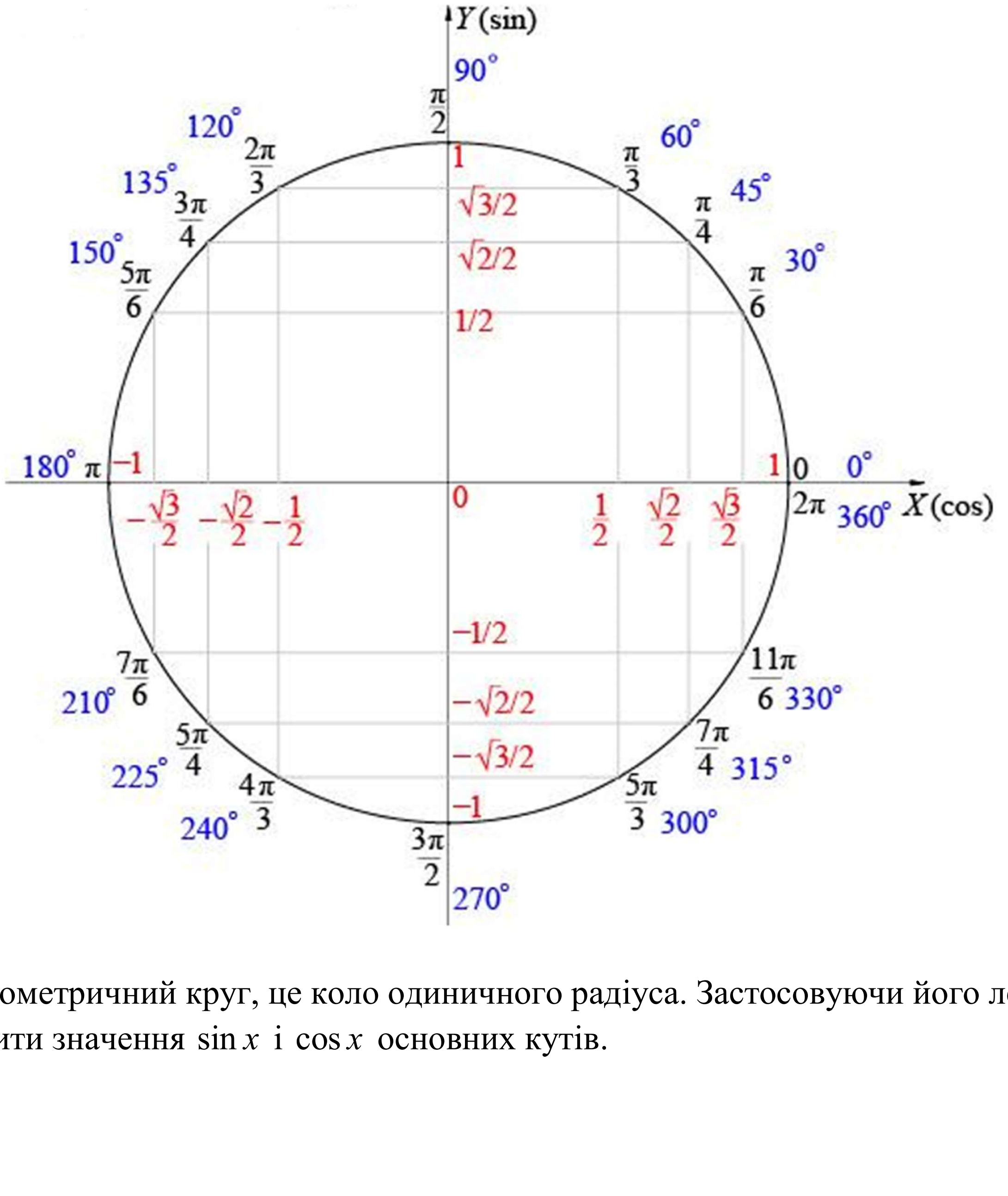
$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$ $x_{\text{рад}} - 15^\circ$	$x = \dfrac{15^\circ \cdot \pi_{\text{рад}}}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{12}\text{рад}$

Приклад 2. Перевести в градуси $\dfrac{5\pi}{6}$ радіан.

$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$ $\dfrac{5\pi}{6}$ рад - x°	$x = \dfrac{5\pi_{\text{рад}}}{6} \cdot \dfrac{180^\circ \cdot}{\pi_{\text{рад}}} = 150^\circ$

Зауваження. В математиці значок градусів – пишеться. Завжди і скрізь. Наприклад, cos30° - це косинус 30 градусів! А ось значок радіанів ("рад") – не пишеться! Він – мається на увазі. Наприклад, sin5 – це синус п'яти радіанів!

Тепер побудуємо тригонометричний круг, на якому відзначимо основні кути не тільки в градусах, а і в радіанах. Під основними кутами розуміють $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ і симетричні їм у всіх координатних чвертях.

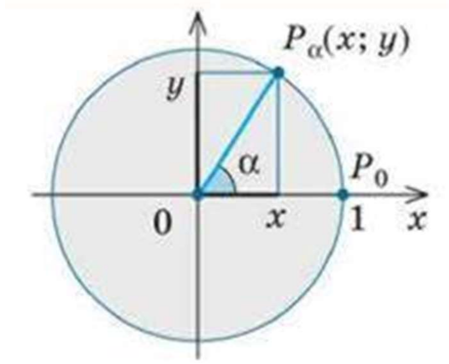


Тригонометричний круг, це коло одиничного радіуса. Застосовуючи його легко знаходити значення $\sin x$ і $\cos x$ основних кутів.

Тригонометричні функції

Дамо визначення синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Ці функції можна визначати або через прямокутний трикутник, або через одиничне коло. Визначимо через одиничне коло.

Синус та косинус можуть бути описані наступним чином: об'єднавши будь-яку точку $(x;y)$ на одиничному колі з початком координат $(0;0)$, ми отримаємо відрізок, що знаходиться під кутом α відносно додатного напрямку осі абсцис. Тоді:



Синусом кута α називається ордината (y) точки одиничного кола: $\sin\alpha = y$.

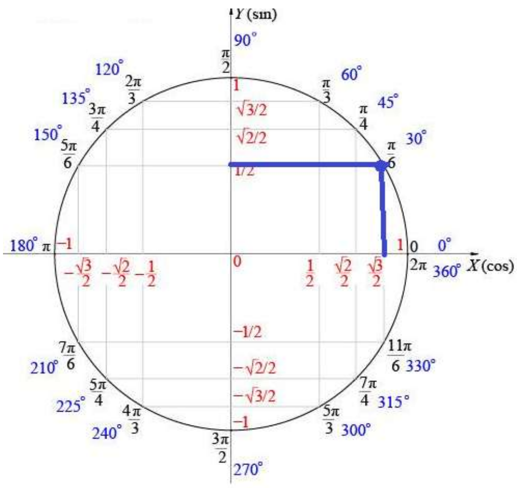
Косинусом кута α називається абсциса (x) точки одиничного кола: $\cos\alpha = x$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати точки до її абсциси, тобто $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (де $\cos\alpha \neq 0$).

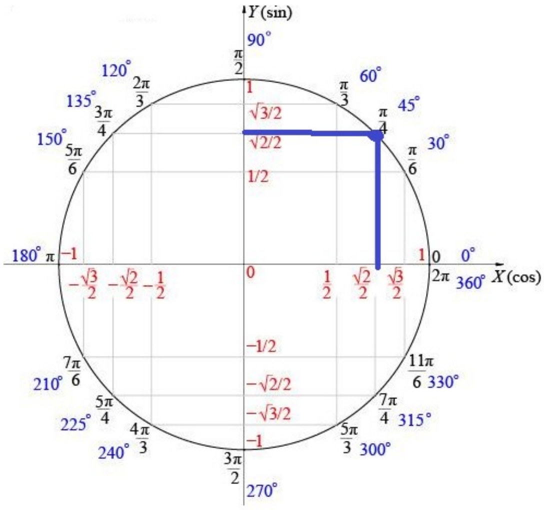
Котангенсом кута α називається відношення абсциси точки до її ординати, тобто $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (где $\sin\alpha \neq 0$).

Для обчислення синуса і косинуса від основних кутів треба пам'ятати зростаючу послідовність з чисел: $0;\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1$.

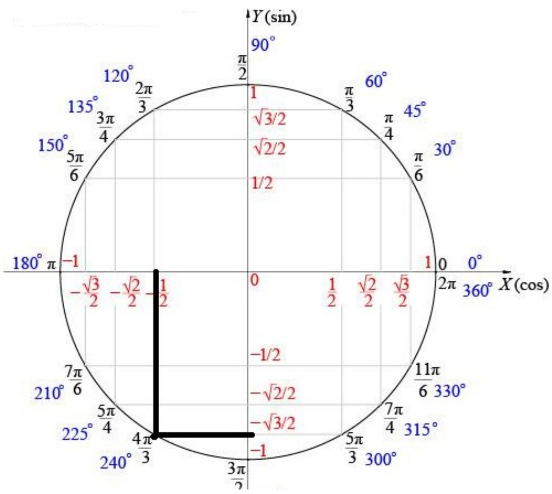
За допомогою тригонометричного кола легко визначати синуси і косинуси основних кутів.



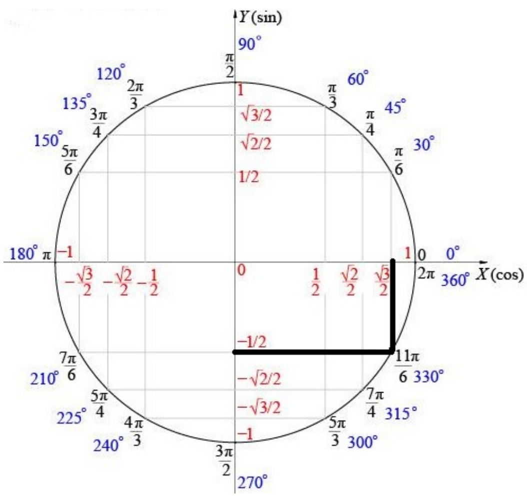
$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$



$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

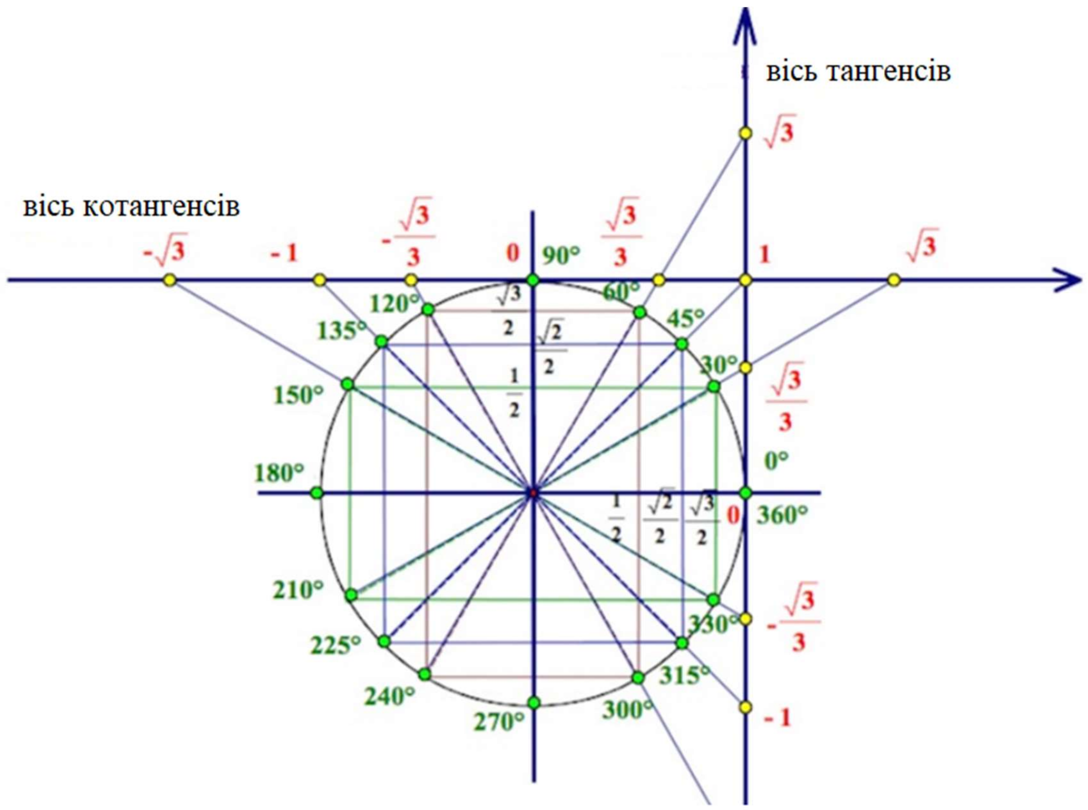


$$\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ ,\quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

Значення $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ можна знаходити із співвідношень $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ або застосовувати одиничне коло і ряд чисел $0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1,\ \sqrt{3}$.



Зауважимо, що $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Обчислимо : $tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\quad ctg\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

За допомогою одиничного кола можна знаходити значення зворотних тригонометричних функцій

За допомогою тригонометричного кола можна визначати значення обернених тригонометричних функцій: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$. В цих функціях по значенням на осях, знаходимо кут (в радіанах).

При цьому пам’ятаємо, що запис $\arcsin a = \varphi$ ($|a| \le 1$), позначає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$.

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ , тому що } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ тому що } \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Запис $\arccos a = \varphi$ ($|a| \le 1$), позначає, що $\varphi \in [0; \pi]$ і $\sin\varphi = a$.

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ тому, що } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запис $\mathrm{arc}\,tga = \varphi$ (a - довільне), позначає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $tg\varphi = a$.

$$arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ тому що } tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Загальні відомості про тригонометричні функції

Тригонометричні функції - елементарні функції, які історично виникли при розгляді прямокутних трикутників і виражали залежності довжин сторін цих трикутників від гострих кутів при гіпотенузі (або, що рівнозначно, залежність хорд і висот від центрального кута дуги в колі). Ці функції знайшли широке застосування в самих різних галузях науки. В процесі розвитку математики визначення тригонометричних функцій було розширено, в сучасному розумінні їх аргументом може бути довільне дійсне або комплексне число.

Розділ математики, що вивчає властивості тригонометричних функцій, називається **тригонометрією**.

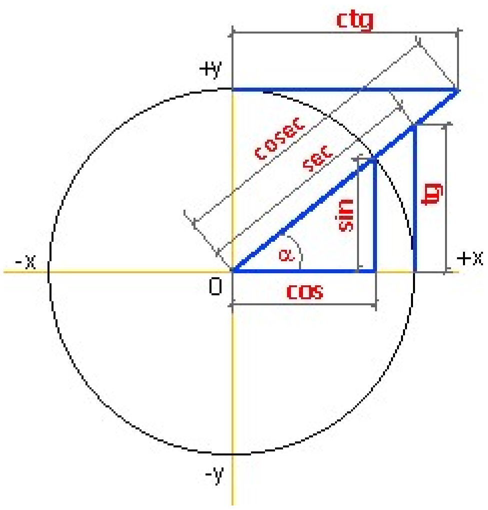
До тригонометричним функціям традиційно відносять:

прямі тригонометричні функції:

- синус - $\sin x$
- косинус - $\cos x$

похідні тригонометричних функцій:

- тангенс $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (в іноземній літературі позначення $\tan x$)
- котангенс $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\cot x$)
- секанс $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;
- косеканс $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\csc x$)

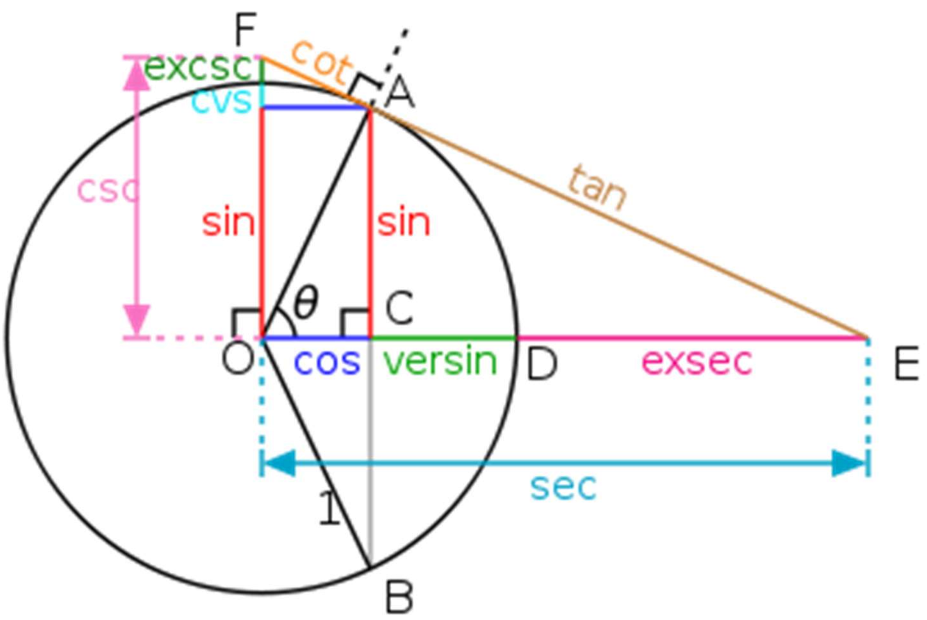


обернені тригонометричні функції:

- арксинус - $\arcsin x$ (в іноземній літературі $\sin^{-1} x$) - кут, синус якого дорівнює x
- арккосинус - $\arccos x$ (в іноземній літературі $\cos^{-1} x$)
- арктангенс - $arctgx$ (в іноземній літературі $\tan^{-1} x$ або $\arctan x$)
- арккотангенс - $arcctgx$ (в іноземній літературі $arc\cot x$)
- арксеканс - $arc\sec x$
- арккосеканс - $arcco\sec x$ (в іноземній літературі $arc\csc x$)

Тригонометричні функції, що дуже рідко використовують:

- Версинус $ver\sin x = 1 - \cos x$ (інші назви: синус-верзус, синус версус).
- коверсинус $ver\cos x = 1 - \sin x$ (інші назви: косинус-верзус , косинус версус).
- Гаверсинус $haver\sin x = \dfrac{ver\sin x}{2}$
- Гаверкосинус $haver\cos x = \dfrac{ver\cos x}{2}$
- Ексеканс $ex\sec x = \sec x - 1$
- Екскосеканс $\mathrm{excsc}x = \mathrm{cosec} - 1$



відрізок CD - версинус, DE - ексеканс.

Застосування

Версинус, коверсиинус і гаверсинус були зручні для розрахунків з використанням логарифмів, оскільки вони всюди невід'ємні, проте в зв'язку з розвитком обчислювальних засобів ця область застосування неактуальна. В даний час ці функції використовуються для опису відповідних сигналів в електроніці (наприклад, в функціональних генераторах). Гаверсинус також сьогодні використовується в навігаційних розрахунках для уникнення помилок округлення в обчислювальних системах з обмеженою розрядністю.