

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (10.13)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, n \in \mathbb{N}, \quad (10.14)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, n \in \mathbb{N}. \quad (10.15)$$

Зауваження 10.4.

Формули (10.13) — (10.15) співпадають з формулами (10.8) — (10.10) при $l = \pi$.

10.2.4. Поняття про спектри

Тригонометричні ряди Фур'є широко застосовуються в радіотехніці, механіці коливних процесів, теорії розповсюдження тепла тощо.

Розглянемо T -періодичну функцію (сигнал) $f(t)$, яка на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, T — період, задовольняє умови теореми Діріхле. Тоді в точках неперервності її можна записати у вигляді ряду Фур'є

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad (10.16)$$

де

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_n t dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \omega_n t dt, n = 1, 2, \dots, \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

Формулу (10.16) запишемо наступним чином:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

де

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Дістали представлення функції $f(t)$ у вигляді суми сталої A_0 (деякого початкового зсуву, що дорівнює середньому значенню $f(t)$ на періоді) та синусоїдальних компонент (*гармонік*) з частотами $\frac{2\pi n}{T}$. В акустиці першу

гармоніку $A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ називають *основним тоном*, а частоту $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ називають *основною частотою*. Тембр звучання різних музичних інструментів створюють тони, які відповідають більш високим частотам, ніж основна (кратним ω_1), їх називають *обертонами*.

Числа A_n та φ_n називають відповідно *амплітудою* та *фазою* n -ої *гармоніки*. Сукупності величин A_n та φ_n утворюють відповідно *амплітудний* та *фазовий частотний спектри* функції $f(t)$. Геометрично амплітудний і фазовий спектри зображаються на координатній площині в системах (ω_n, A_n) і (ω_n, φ_n) , коли по вісі абсцис відкладаються значення частот ω_n , а по вісі ординат відповідні їм значення A_n та φ_n . Дістанемо так звані лінійчаті спектри.

Між періодичними функціями та їх частотними спектрами існує взаємно однозначна відповідність: періодична функція повністю визначається своїм частотним спектром і, навпаки, за частотним спектром функції можна визначити періодичну функцію.

Приклад 10.1.

Знайдемо частотні спектри функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi, \\ -1, & \pi < x < 2\pi, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

○ Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n|, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Графік амплітудного частотного спектру зображено на рис. 10.1. ●

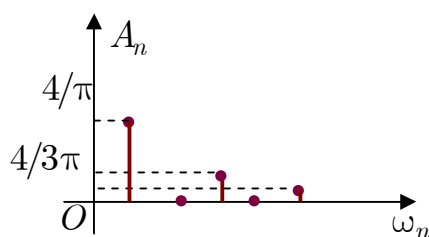


Рис. 10.1

10.2.5. Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів

1. Послідовність прямокутних імпульсів з амплітудою A , тривалістю τ та періодом повторювання $T = 2\tau$ (меандр).

Прямокутний імпульс із амплітудою A тривалістю τ задається функцією:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq t < -\frac{\tau}{2}, \\ A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t \leq \tau, \end{cases} T = 2\tau.$$

Середину імпульсу розглядаємо як початок відліку часу.

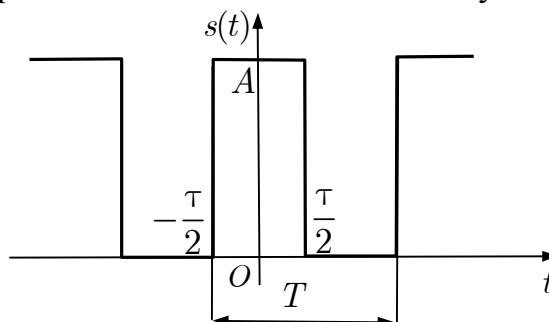


Рис. 10.2

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = A;$$

$$a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos\left(\frac{n\pi}{\tau} t\right) dt = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \sin\left(\frac{n\pi}{\tau} t\right) dt = 0.$$

Для функції $s(t)$ дістанемо ряд Фур'є

$$s(t) \sim \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{\tau} t\right),$$

де амплітуда $A_n = \left| \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right|$ (графік амплітудного спектру зображено на рис. 10.3).

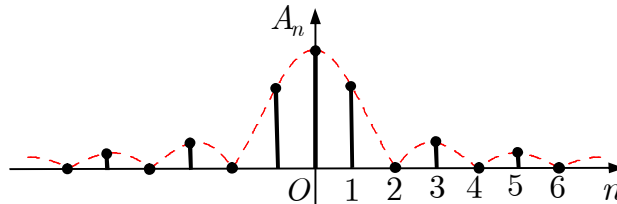


Рис. 10.3

Послідовність прямокутних імпульсів погано підходить для зображення рядом Фур'є — вона містить стрибки, а сума будь-якої кількості гармонік із довільними амплітудами завжди буде неперервною функцією. Тому поведінка ряду Фур'є в околах розривів є особливо цікавою. На графіках рис. 10.4 добре видно, що в околі точки розриву підсумовування ряду Фур'є дає похилу ділянку, причому крутизна нахилу зростає з кількістю доданків. У точках розриву ряд Фур'є збігається до півсуми лівої та правої граничних значень. На прилеглих до розриву ділянках сума ряду Фур'є дає помітні пульсації, причому амплітуда пульсацій не зменшується зі зростанням кількості доданків — пульсації лише стискаються вздовж горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище, притаманне рядам Фур'є для будь-яких сигналів із розривами 1-го роду, називають ефектом Гібса.

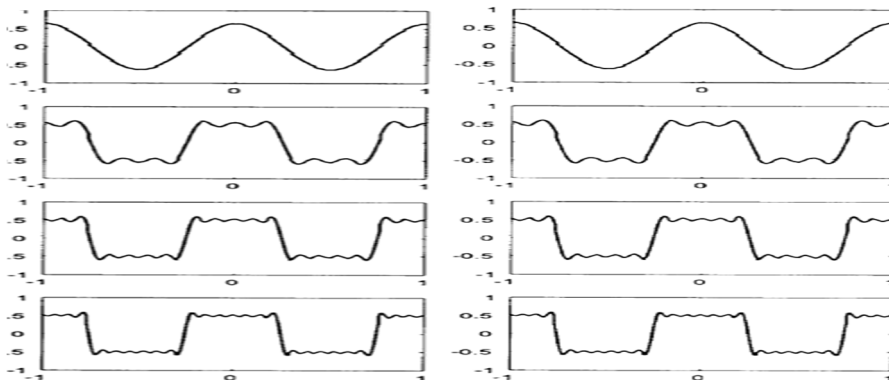


Рис. 10.4. Проміжні стадії підсумовування ряду Фур'є для меандру
2. Пилкуватий сигнал (рис. 10.11)

$$s(t) = \frac{2A}{T}(t - kT), \left(k - \frac{1}{2}\right)T < t \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)T.$$

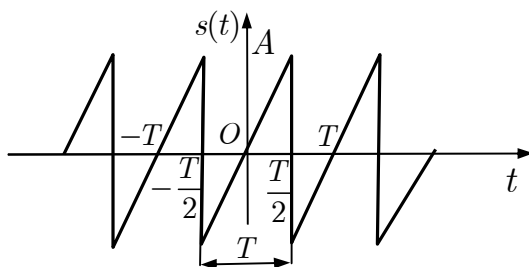


Рис. 10.11

Обчислюючи коефіцієнти Фур'є, одержимо наступне розвинення в ряд Фур'є пилкуватого сигналу:

$$s(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} (-1)^n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right).$$

Отже, амплітудний спектр (рис. 10.12)

$$A_n = \frac{2A}{\pi n}, n \in \mathbb{N}.$$

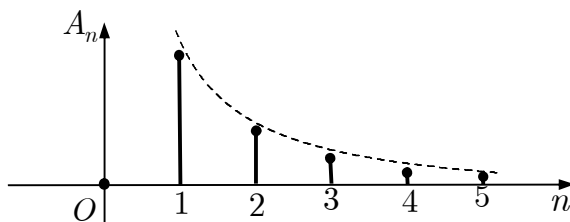


Рис. 10.12

У прямокутного та пилкуватого періодичних сигналів амплітуди гармонік із зростанням їхніх номерів спадають пропорційно n .