Лекція №2 для груп ТРТК-20-1, ТРІМІ-20-1,2

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай задана поверхня S рівнянням $F(x,y,z)=0$ $(S\subset R^3)$, а також точка $P(x_0,y_0,z_0)$.

Означення. Якщо в заданій точці $P(x_0,y_0,z_0)$ всі частинні похідні дорівнюють нулю або хоча б одна з них не існує, то тоді точка P називається **особливою (сингулярною)**.

Наприклад, для конуса $z^2=x^2+y^2$:

$$F:\ \ z^2-x^2-y^2=0;$$

$$F'_x=-2x,\ \ F'_y=-2y,\ \ F'_z=2z.$$

В точці $O(0,0,0)$ всі частинні похідні дорівнюють нулю:

$$F'_x(O)=F'_y(O)=F'_z(O)=0\Rightarrow O(0,0,0)-\text{сингулярна точка.}$$

Означення. Якщо в точці $P(x_0,y_0,z_0)$ всі частинні похідні існують та не всі дорівнюють нулю, то така точка називається **звичайною (регулярною)**.

Означення. Пряма називається **дотичною** до поверхні S в звичайній точці $P(x_0,y_0,z_0)$, якщо вона є дотичною в деякій лінії, що належить поверхні S, та проходить через точку $P(x_0,y_0,z_0)$.

Існує нескінчене число дотичних кривих. Ці криві лежать в одній площині – **дотичній площині**:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Нормаль до дотичної площини $\overline{n}=(F'_x(P),F'_y(P),F'_z(P))$:

$$F'_x(P)(x-x_0)+F'_y(P)(y-y_0)+F'_z(P)(z-z_0)=0.$$

Означення. Пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно дотичній площині, називається **нормаллю**.

Рівняння нормалі: $\dfrac{x-x_0}{F'_x(P)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(P)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(P)}$.

Зауваження. Якщо функція задана явно $z=f(x,y)$, то:

$$f(x,y)-z=0\Rightarrow f'_x,\ f'_y,\ f'_z=-1.$$

І тоді рівняння дотичної площини має вигляд:

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Рівняння нормалі: $\boxed{\dfrac{x-x_0}{f_x'(P)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(P)}=\dfrac{z-z_0}{-1}}$.

Приклад. Скласти рівняння нормалі та дотичної площини до поверхні $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точці $M(1,2,3)$.

Розв'язування

$$\underbrace{x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16}_{F(x,y,z)}=0$$

$$F_x'=2x+y-2z,\quad F_x'(M)=2+2-6=-2;$$
$$F_y'=4y+x+z,\quad F_y'(M)=8+1+3=12;$$
$$F_z'=-6z+y-2x,\quad F_z'(M)=-18+2-2=-18.$$

Рівняння дотичної площини:

$$F_x'(P)(x-x_0)+F_y'(P)(y-y_0)+F_z'(P)(z-z_0)=0;$$
$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0;$$
$$-2x+2+12y-24-18z+54=0;$$
$$-2x+12y-18z+32=0;$$
$$x-6y+9z-16=0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P)};$$
$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18};$$
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}.$$

Похідна за напрямом вектора $\bar{s}$. Градієнт функції

Означення. Якщо точка M належить області D та ставиться у відповідність число $u=u(M)$, то кажуть, що задано **скалярне поле** $u=u(M)$ (або **функція точки**). Якщо $M\in D\subset R^3$, то $u=u(x,y,z)-$просторове скалярне поле, якщо $M\in D\subset R^2$, то $u=u(x,y)-$лінія рівня.

Нехай існує точка $M(x,y,z)\in D$ в 3-х вимірному просторі. Надамо деякий приріст $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\in D$. Тоді:

$$\Delta\overline{s} = \overline{MM_1} = (x+\Delta x - x, y+\Delta y - y, z+\Delta z - z);$$

$$\Delta\overline{s} = \overline{MM_1} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z);$$

$$\left|\Delta\overline{s}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2};$$

$$\overline{s} - \text{орт вектора}, \ \left|\overline{s}\right| = 1;$$

$$\overline{s} = \frac{\Delta\overline{s}}{\left|\Delta\overline{s}\right|} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s}, \frac{\Delta z}{\Delta s}\right) = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right).$$

Косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами**.

Означення. Функція $u(x,y,z)$ називається диференційованою, якщо її повний приріст може бути представлений у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z + \frac{\overset{\nearrow 0}{O\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right)}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \qquad (*)$$

Якщо рівняння $(*)$ розділити на Δs, то отримаємо:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s};$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Означення. **Похідною функції** $u = u(x,y,z)$ **за напрямом** вектора $\overline{s}$ називається

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{s}} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Похідна за напрямом характеризує швидкість змінювання функції в довільному напрямку $\overline{s}$.

Означення. **Градієнтом** функції $u = u(x,y,z)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні функції:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Приклад. Знайти градієнт та похідну за напрямом $\overline{s} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $M(1,2,0)$.

Розв'язування

$$\overline{s} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k} = (2,1,3), \quad \left|\overline{s}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14};$$

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{\left|\overline{s}\right|}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}; \quad \cos\beta = \frac{s_y}{\left|\overline{s}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\gamma = \frac{s_z}{\left|\overline{s}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 2x, \quad u'_x(M) = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = 2y, \quad u'_y(M) = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = 2z, \quad u'_z(M) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{s}}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{s}}\right|_M = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 4 + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot 0 = \frac{4+4}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(u'_x(M), u'_y(M), u'_z(M)\right);$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(2,4,0\right).$$