Лекция №2 для групп ТРТК-20-1, ТРИМИ-20-1,2

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть задана поверхность S уравнением $F(x,y,z)=0$ ($S\subset R^3$), а также точка $P(x_0,y_0,z_0)$.

Определение. Если в данной точке $P(x_0,y_0,z_0)$ все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует, то тогда точка P называется **особой (сингулярной)**.

Например, для конуса $z^2=x^2+y^2$:

$$F:\ \ z^2-x^2-y^2=0;$$

$$F'_x=-2x,\ \ F'_y=-2y,\ \ F'_z=2z.$$

В точке $O(0,0,0)$ все частные производные равны нулю:

$$F'_x(O)=F'_y(O)=F'_z(O)=0\Rightarrow O(0,0,0)-\text{сингулярная точка.}$$

Определение. Если в точке $P(x_0,y_0,z_0)$ все частные производные существуют и не все равны нулю, то такая точка называется **обыкновенной (регулярной)**.

Определение. Прямая называется **касательной** к поверхности S в обыкновенной точке $P(x_0,y_0,z_0)$, если она является касательной в некоторой линии, принадлежащей поверхности S, проходящей через точку $P(x_0,y_0,z_0)$.

Существует бесконечное число касательных кривых. Эти кривые лежат в одной плоскости – **касательной плоскости**:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Нормаль к касательной плоскости $\overline{n}=(F'_x(P),F'_y(P),F'_z(P))$:

$$F'_x(P)(x-x_0)+F'_y(P)(y-y_0)+F'_z(P)(z-z_0)=0.$$

Определение. Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной плоскости, называется **нормалью**.

Уравнение нормали: $\frac{x-x_0}{F'_x(P)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P)}$.

Замечание. Если функция задана явно $z=f(x,y)$, то:

$$f(x,y)-z=0 \Rightarrow f'_x,\ f'_y,\ f'_z=-1.$$

И тогда уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Уравнение нормали: $\frac{x-x_0}{f'_x(P)}=\frac{y-y_0}{f'_y(P)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

Пример. Составить уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $M(1,2,3)$.

Решение

$$\underbrace{x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16}_{F(x,y,z)}=0$$

$$F'_x=2x+y-2z,\quad F'_x(M)=2+2-6=-2;$$

$$F'_y=4y+x+z,\quad F'_y(M)=8+1+3=12;$$

$$F'_z=-6z+y-2x,\quad F'_z(M)=-18+2-2=-18.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(P)(x-x_0)+F'_y(P)(y-y_0)+F'_z(P)(z-z_0)=0;$$

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0;$$

$$-2x+2+12y-24-18z+54=0;$$

$$-2x+12y-18z+32=0;$$

$$x-6y+9z-16=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P)};$$

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18};$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}.$$

Производная по направлению вектора $\overline{s}$. Градиент функции

Определение. Если точка M принадлежит области D и ставится в соответствие число $u=u(M)$, то говорят, что задано **скалярное поле** $u=u(M)$ (или **функция точки**). Если $M\in D\subset R^3$, то $u=u(x,y,z)-$пространственное скалярное поле, если $M\in D\subset R^2$, то $u=u(x,y)-$линия уровня.

Пусть существует точка $M(x,y,z)\in D$ в 3-х мерном пространстве. Придадим некоторое приращение $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\in D$. Тогда:

$$\Delta\overline{s}=\overline{MM_1}=(x+\Delta x-x,y+\Delta y-y,z+\Delta z-z);$$

$$\Delta\overline{s}=\overline{MM_1}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z);$$

$$|\Delta\overline{s}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2};$$

$$\overline{s}-\text{орт вектора, } |\overline{s}|=1;$$

$$\overline{s}=\frac{\Delta\overline{s}}{|\Delta\overline{s}|}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta s},\frac{\Delta y}{\Delta s},\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right).$$

Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющимися косинусами**.

Определение. Функция $u(x,y,z)$ называется дифференцируемой, если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z+\overset{\nearrow 0}{\frac{O\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}} \qquad (*)$$

Если уравнение $(*)$ поделим на Δs, то получим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s};$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma .$$

Определение. **Производной функции** $u=u(x,y,z)$ **по направлению** вектора $\overline{s}$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{s}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s};$$

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{s}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma .$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в произвольном направлении $\overline{s}$.

Определение. **Градиентом** функции $u=u(x,y,z)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные функции:

$$\operatorname{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Пример. Найти градиент и производную в направлении $\overline{s}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$ функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точке $M(1,2,0)$.

Решение

$$\overline{s}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}=(2,1,3),\quad |\overline{s}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14};$$

$$\cos\alpha=\frac{s_x}{|\overline{s}|},\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}};\quad \cos\beta=\frac{s_y}{|\overline{s}|},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\gamma = \frac{s_z}{|\bar{s}|}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 2x, \quad u'_x(M) = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = 2y, \quad u'_y(M) = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = 2z, \quad u'_z(M) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{s}}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{s}}\right|_M = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 4 + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot 0 = \frac{4+4}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(u'_x(M), u'_y(M), u'_z(M)\right);$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(2, 4, 0\right).$$