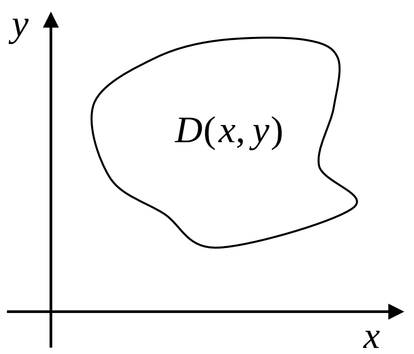
Лекція №1 для груп ТРТК-20-1, ТРІМІ-20-1,2

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення. Нехай на площині Oxy задано множину точок D. Якщо за деяким правилом f кожній парі (x, y) ставиться у відповідність деяке значення z, то кажуть, що задана **функція від двох змінних**.



$$D(x, y) \xrightarrow{f} z \in R$$

Символічно це записується так $z = f(x, y)$. Де:

$x, y -$ аргументи, незалежні змінні;

$z -$ функція від двох змінних;

$D -$ область визначення функції (область допустимих значень ОДЗ).

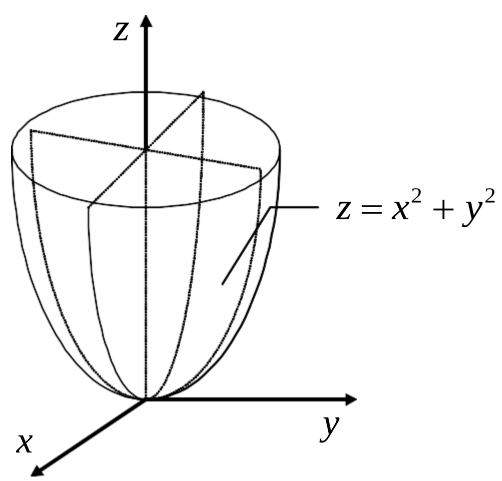
Графіком функції $z = f(x, y)$ називається поверхня в 3-х вимірному просторі.

Приклад. Знайти ОДЗ функцій та побудувати їх графік:

а) $z = x^2 + y^2$;

ОДЗ: $x \in R,\ y \in R$;

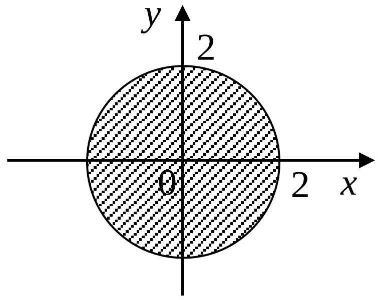
Графік – параболоїд обертання.



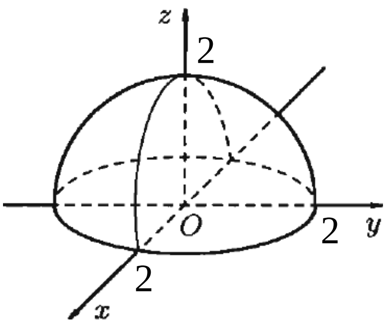
б) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

ОДЗ: $4-x^2-y^2\geq 0,\quad x^2+y^2\leq 4,$

$x^2+y^2\leq 4-$ внутрішні та граничні точки кола з центром в точці $O(0,0)$ та радіусом $R=2$.



Графік – півсфера (верхня частина сфери з центром в точці $O(0,0,0)$ та радіусом $R=2$).



Означення. Всякий упорядкований набір з n дійсних чисел $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in R$ називається точкою $n-$вимірного простору R^n.

Відстань між точками $P(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ і $P'(x_1',x_2',x_3',...,x_n')$ в $n-$мірному просторі визначається формулою:

$$\rho=\rho(P,P')=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+...+(x_n'-x_n)^2}\,.$$

Означення. Нехай D деяка підмножина в R^n. Якщо за деяким правилом f кожному набору $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ ставиться у відповідність деяке значення $u=f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$, то функція $u=f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ називається **функцією** n **змінних**.

Похідна від функції багатьох змінних. Частинні похідні

Нехай $M(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ – точка в n – вимірному просторі.

Означення. Частинною похідною функції $u = f(M)$ за змінною x_k називається границя

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k},$$

якщо вона існує.

Позначення: $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, f'_{x_k}, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Таким чином: $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}$.

Для функції 2-х змінних $z = f(x, y)$ отримуємо:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \quad z'_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

З означення слідує, що частинна похідна за змінною x_k знаходиться в припущенні, що інші аргументи це константи, а змінюється лише аргумент x_k. При цьому зберігаються всі правила диференціювання функції однієї змінної. Тобто, щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, необхідно обчислити звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ за змінною x_k, вважаючи інші змінні постійними (константами).

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = 3x^2y^4 + 5xy - 4x^2 + 7y^3 + 8$.

$$z'_x = |y - \text{const}| = 6xy^4 + 5y - 8x;$$

$$z'_y = |x - \text{const}| = 12x^2y^3 + 5x + 21y^2.$$

б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

$$z'_x=\left|y-\text{const}\right|=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y=\left|x-\text{const}\right|=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Повний та частинні диференціали

Означення. Функція $z=f(x,y)$ називається **диференційованою в точці** M, якщо її повний приріст може бути представлений у вигляді:

$$\Delta z=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y}_{\text{головна частина}}+O\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho\to 0$.

Означення. Головна частина приросту називається **повним диференціалом функції** $z=f(x,y)$.

$$\left.\begin{aligned}\Delta x&=dx\\ \Delta y&=dy\end{aligned}\right\}\text{ для незалежних змінних}.$$

З урахуванням останнього:

$$\boxed{dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy},\text{ або }\boxed{dz=d_xz+d_yz},$$

або $\boxed{dz=z'_xdx+z'_ydy-}$ **повний диференціал**.

Частинні диференціали:

$$\boxed{d_xz=z'_xdx=\frac{\partial f}{\partial x}dx},\quad \boxed{d_yz=z'_ydy=\frac{\partial f}{\partial y}dy}.$$

Приклад. Знайти частинні та повний диференціали функції $u = \ln x + xy^3 + x^2 \cos y$.

Розв'язування

$$u'_x = \frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y, \quad u'_y = 3xy^2 - x^2 \sin y;$$

$$d_x u = u'_x dx = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y \right) dx;$$

$$d_y u = u'_y dy = \left(3xy^2 - x^2 \sin y \right) dy;$$

$$dz = d_x z + d_y z = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y \right) dx + \left(3xy^2 - x^2 \sin y \right) dy.$$