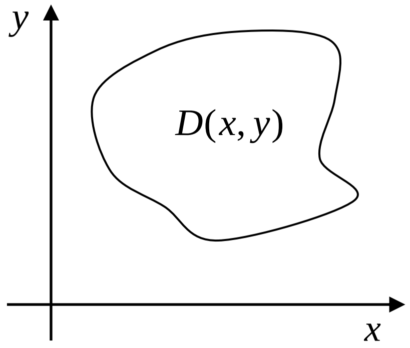
Лекція №1 для груп КУІБ-20-1,2; МТТЕ-20-1

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення. Нехай на площині Oxy задано множину точок D. Якщо за деяким правилом f кожній парі (x, y) ставиться у відповідність деяке значення z, то кажуть, що задана **функція від двох змінних**.



$$D(x, y) \xrightarrow{f} z \in R$$

Символічно це записується так $z = f(x, y)$. Де:

$x, y -$ аргументи, незалежні змінні;

$z -$ функція від двох змінних;

$D -$ область визначення функції (область допустимих значень ОДЗ).

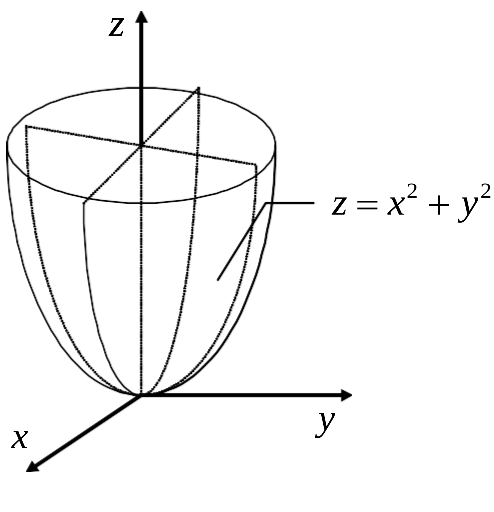
Графіком функції $z = f(x, y)$ називається поверхня в 3-х вимірному просторі.

Приклад. Знайти ОДЗ функцій та побудувати їх графік:

а) $z = x^2 + y^2$;

ОДЗ: $x \in R,\ y \in R$;

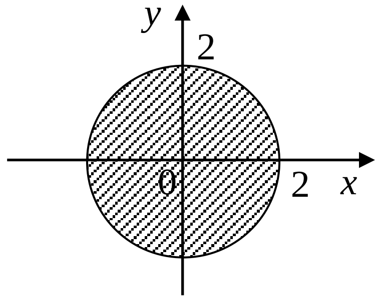
Графік – параболоїд обертання.



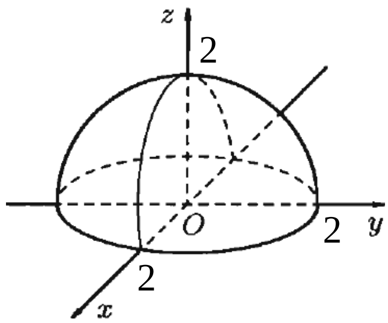
б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

ОДЗ: $4 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$

$x^2 + y^2 \le 4 -$ внутрішні та граничні точки кола з центром в точці $O(0,0)$ та радіусом $R = 2$.



Графік – півсфера (верхня частина сфери з центром в точці $O(0,0,0)$ та радіусом $R = 2$).



Означення. Всякий упорядкований набір з n дійсних чисел $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in R$ називається точкою $n -$вимірного простору R^n.

Відстань між точками $P(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ і $P'(x_1', x_2', x_3', ..., x_n')$ в $n -$мірному просторі визначається формулою:

$$\rho = \rho(P, P') = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + ... + (x_n' - x_n)^2} .$$

Означення. Нехай D деяка підмножина в R^n. Якщо за деяким правилом f кожному набору $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ставиться у відповідність деяке значення $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, то функція $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ називається **функцією n змінних**.

Похідна від функції багатьох змінних. Частинні похідні

Нехай $M(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ – точка в n – вимірному просторі.

Означення. Частинною похідною функції $u = f(M)$ за змінною x_k називається границя

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k},$$

якщо вона існує.

Позначення: $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, f'_{x_k}, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Таким чином: $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}$.

Для функції 2-х змінних $z = f(x, y)$ отримуємо:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \quad z'_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

З означення слідує, що частинна похідна за змінною x_k знаходиться в припущенні, що інші аргументи це константи, а змінюється лише аргумент x_k. При цьому зберігаються всі правила диференціювання функції однієї змінної. Тобто, щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, необхідно обчислити звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ за змінною x_k, вважаючи інші змінні постійними (константами).

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = 3x^2y^4 + 5xy - 4x^2 + 7y^3 + 8$.

$$z'_x = |y - \text{const}| = 6xy^4 + 5y - 8x;$$

$$z'_y = |x - \text{const}| = 12x^2y^3 + 5x + 21y^2.$$

б) $z = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$.

$$z'_x = |y - \text{const}| = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = |x - \text{const}| = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Повний та частинні диференціали

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається **диференційованою в точці** M, якщо її повний приріст може бути представлений у вигляді:

$$\Delta z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y}_{\text{головна частина}} + \text{O}(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho \to 0$.

Означення. Головна частина приросту називається **повним диференціалом функції** $z = f(x, y)$.

$\left.\begin{matrix}\Delta x = dx \\ \Delta y = dy\end{matrix}\right\}$ для незалежних змінних .

З урахуванням останнього:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \text{ або } dz = d_x z + d_y z,$$

або $dz = z'_x dx + z'_y dy$ – **повний диференціал**.

Частинні диференціали:

$$d_x z = z'_x dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad d_y z = z'_y dy = \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Приклад. Знайти частинні та повний диференціали функції $u = \ln x + xy^3 + x^2 \cos y$.

Розв'язування

$$u'_x = \frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y, \quad u'_y = 3xy^2 - x^2\sin y;$$

$$d_x u = u'_x dx = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y\right)dx;$$

$$d_y u = u'_y dy = \left(3xy^2 - x^2\sin y\right)dy;$$

$$dz = d_x z + d_y z = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y\right)dx + \left(3xy^2 - x^2\sin y\right)dy.$$