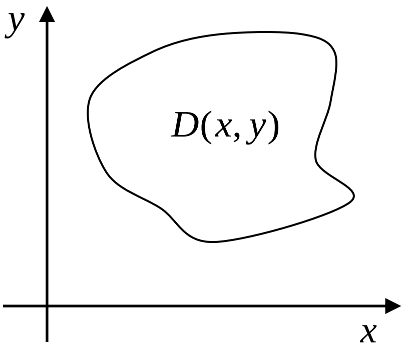
Лекция №1 для групп КУИБ-20-1,2; МТТЕ-20-1

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Пусть на плоскости Oxy задано множество точек D. Если по некоторому правилу f каждой паре (x, y) ставится в соответствие некоторое значение z, то говорят, что задана **функция от двух переменных**.



$$D(x,y) \xrightarrow{f} z \in R$$

Символично это записывается так $z = f(x, y)$. Где:

$x, y -$ аргументы, независимые переменные;

$z -$ функция от двух переменных;

$D -$ область определения функции (область допустимых значений ОДЗ).

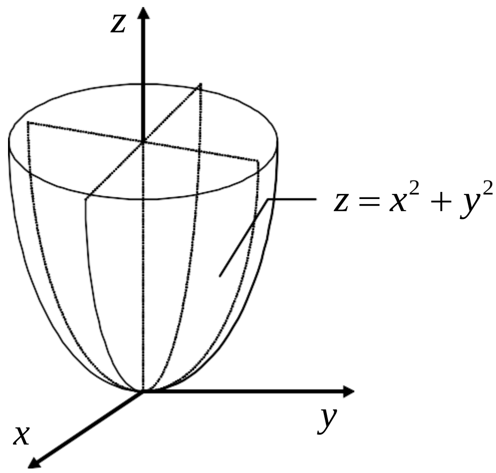
Графиком функции $z = f(x, y)$ называется поверхность в 3-х мерном пространстве.

Пример. Найти ОДЗ функций и построить их график:

а) $z = x^2 + y^2$;

ОДЗ: $x \in R,\ y \in R$;

График – параболоид вращения.



б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

ОДЗ: $4 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$,

$x^2+y^2\le 4-$ внутренние и граничные точки окружности с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом $R=2$.

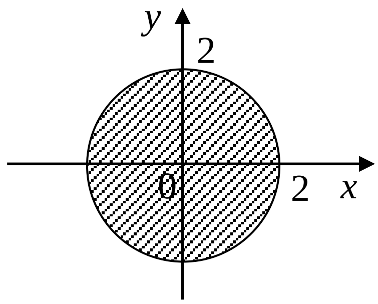
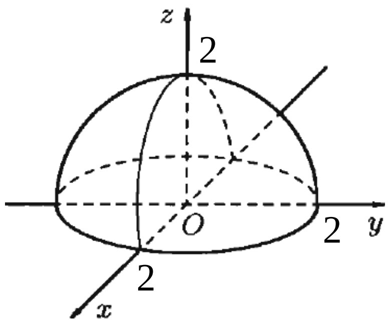


График – полусфера (верхняя часть сферы с центром в точке $O(0,0,0)$ и радиусом $R=2$).



Определение. Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in R$ называется точкой $n-$мерного пространства R^n.

Расстояние между точками $P(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ и $P'(x_1',x_2',x_3',...,x_n')$ в $n-$мерном пространстве определяется формулой:

$$\rho=\rho(P,P')=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+...+(x_n'-x_n)^2}\ .$$

Определение. Пусть D некоторое подмножество в R^n. Если по некоторому правилу f каждому набору $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ ставится в соответствие некоторое значение $u=f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$, то функция $u=f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ называется **функцией** n **переменных**.

Производная от функции нескольких переменных. Частные производные

Пусть $M(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) -$ точка в $n-$мерном пространстве.

Определение. Частной производной функции $u = f(M)$ по переменной x_k называется граница

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k},$$

если она существует.

Обозначения: $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, f'_{x_k}, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Таким образом: $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}$.

Для функции 2-х переменных $z = f(x, y)$ получаем:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \quad z'_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

С определения следует, что частная производная по переменной x_k находится в предположении, что другие аргументы это константы, а изменяется только аргумент x_k. При этом сохраняются все правила дифференцирования функции одной переменной. То есть, чтобы найти частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, необходимо взять обычную производную функции $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ по переменной x_k, считая остальные переменные постоянными.

Пример. Найти частные производные функций:

а) $z = 3x^2y^4 + 5xy - 4x^2 + 7y^3 + 8$.

$$z'_x = |y - \text{const}| = 6xy^4 + 5y - 8x;$$

$$z'_y = |x - \text{const}| = 12x^2y^3 + 5x + 21y^2.$$

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

$$z'_x = |y - \text{const}| = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = |x - \text{const}| = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Полный и частный дифференциалы

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой в точке** M, если ее полное приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y}_{\text{главная часть}} + O\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho \to 0$.

Определение. Главная часть приращения называется **полным дифференциалом функции** $z = f(x, y)$.

$\left.\begin{matrix} \Delta x = dx \\ \Delta y = dy \end{matrix}\right\}$ для независимых переменных.

С учетом последнего:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \text{ или } dz = d_x z + d_y z,$$

или $dz = z'_x dx + z'_y dy$ – **полный дифференциал**.

Частные дифференциалы:

$$d_x z = z'_x dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad d_y z = z'_y dy = \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Пример. Найти частные и полный дифференциалы функции $u = \ln x + xy^3 + x^2 \cos y$.

Решение

$$u'_x = \frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y, \quad u'_y = 3xy^2 - x^2 \sin y;$$

$$d_x u = u'_x dx = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y\right) dx;$$

$$d_y u = u'_y dy = \left(3xy^2 - x^2 \sin y\right) dy;$$

$$dz = d_x z + d_y z = \left(\frac{1}{x} + y^3 + 2x\cos y\right) dx + \left(3xy^2 - x^2 \sin y\right) dy.$$