Ряди

1) Числові ряди з додатними членами

Необхідна умова збіжності	Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$	
Достатні умови збіжності	1. <u>Гранична ознака порівняння:</u> якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l \neq 0,$ то обидва ряда збігаються, або обидва розбігаються.	$u_n = \dfrac{P_к(n)}{Q_m(n)}$
	2. <u>Ознака Даламбера:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l,$ $l<1$ – ряд збігається, $l>1$ – ряд розбігається, $l=1$ – дод. дослідження .	$(n!)$ або (a^n)
	3. <u>Радикальна ознака Коші:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l,$ $l<1$ – ряд збігається, $l>1$ – ряд розбігається, $l=1$ – дод. дослідження	$u_n = (\ldots)^n$
	4. <u>Інтегральна ознака Коші:</u> Якщо $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ збігається (розбігається), то й ряд збігається (розбігається). $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} \text{const} \Rightarrow \text{збігається} \\ \pm\infty \Rightarrow \text{розбігається} \end{cases}$	Можна обчислити $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, де $f(n) = u_n \ \forall n$

Частинні випадки

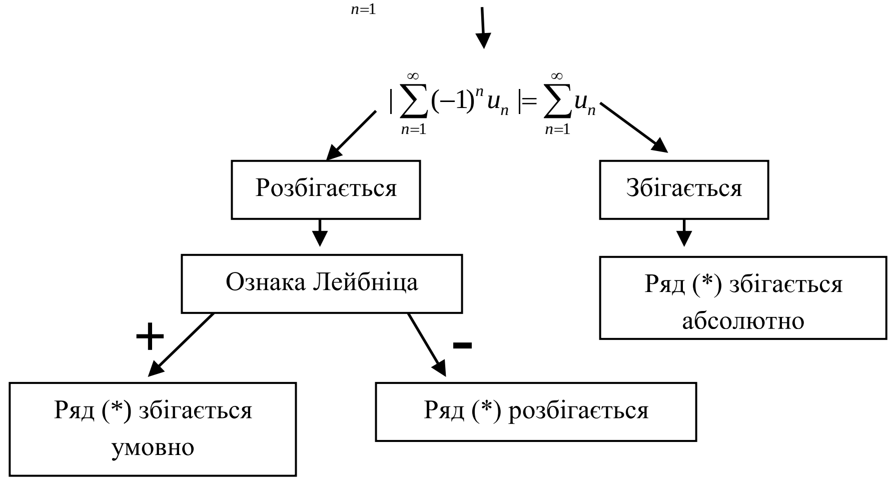
I. Узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{збігається, якщо } p>1 \\ \text{розбігається, якщо } p\le 1 \end{cases}$$

II. Ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \text{збігається, якщо } |q|<1 \\ \text{розбігається, якщо } |q|\ge 1 \end{cases}$$

2) Знакопочережні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (*)



Ознака Лейбніца:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots,\ u_n > 0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

3) Степеневі ряди: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ або $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Радіус збіжності	$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}}$.
Область збіжності	$\lvert x\rvert < R$ або $\lvert x-x_0\rvert < R$

4) Ряди Фур'є

Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, де $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$
Ряд Фур'є для парної періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx.$
Ряд Фур'є для непарної періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, де $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$
Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l})$, де $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$

Ряд Фур'є для парної періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}$, де $a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$
Ряд Фур'є для непарної періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}$, де $b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$
Ряд Фур'є в комплексній формі для періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$, де $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx.$
Ряд Фур'є в комплексній формі для періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{\pi nx}{l}}$, де $c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{l}}dx.$