Операційне числення. Перетворення Лапласа

Одинична функція Хевісайда: $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

Інтеграл Лапласа: $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

Властивості перетворення Лапласа

Якщо $f(t)\to F(p)$, а $g(t)\to G(p)$, то

1. Лінійність: $\alpha f(t)+\beta g(t)\to \alpha F(p)+\beta G(p)$, де $\alpha,\beta\in$ £

2. Теорема подібності: $f(\alpha t)\to \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$

3. Теорема запізнювання: $f(t-\tau)\eta(t-\tau)\to e^{-p\tau}F(p)$

4. Теорема зміщення: $e^{p_0 t}f(t)\to F(p-p_0)$

5. Диференціювання оригіналу:

$f'(t)\to pF(p)-f(0)$.

$f''(t)\to p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$,……..,

$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(0)$

6. Диференціювання зображення:

$F'(p)\leftarrow -t\cdot f(t)$,

$F''(p)\leftarrow t^2\cdot f(t)$,……….,

$F^{(n)}(p)\leftarrow (-1)^n t^n\cdot f(t)$

7. Інтегрування оригіналу: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\to \frac{F(p)}{p}$

8. Інтегрування зображення: $\frac{f(t)}{t}\to \int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$

9. Теорема множення (теорема про згортку):

$F_1(p)F_2(p)\leftarrow f_1(t)*f_2(t)$, де

$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ -згортка функцій

Таблиця зображень основних функцій

$1\to\frac{1}{p}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t\to\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\to\frac{1}{p-\alpha}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t\to\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\sin\beta t\to\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}\mathrm{sh}\beta t\to\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
$\cos\beta t\to\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t}\mathrm{ch}\beta t\to\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
$\mathrm{sh}\beta t\to\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$	$t\cdot\sin\beta t\to\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
$\mathrm{ch}\beta t\to\frac{p}{p^2-\beta^2}$	$t\cdot\cos\beta t\to\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t^n\to\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t\cdot\mathrm{sh}\beta t\to\frac{2p\beta}{(p^2-\beta^2)^2}$
$e^{\alpha t}t^n\to\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t\cdot\mathrm{ch}\beta t\to\frac{p^2+\beta^2}{(p^2-\beta^2)^2}$
$\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)\to\frac{1}{(p^2+\beta^2)^2}$	

$$\mathrm{ch}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \mathrm{sh}\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$